

# Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

## Zbieżność metody elementów skończonych

- Wykład przedstawia niektóre aspekty matematyczne metody elementów skończonych, w szczególności dowód jej zbieżności.
- Z jego treści obowiązujące są definicje występujących pojęć oraz twierdzenia, a zwłaszcza ostateczny wynik: postać oszacowania błędu MES.
- Znajomość dowodów twierdzeń nie jest obowiązkowa.

# Pojęcia wstępne

- **Def.** Forma  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  jest iloczynem skalarnym, jeśli jest
  1. Dwuliniowa.
  2. Symetryczna:  $B(u, v) = B(v, u) \quad \forall u, v \in V$ .
  3. Dodatnio określona:  $B(u, u) \geq 0 \quad \forall u \in V, \quad B(u, u) = 0 \iff u = 0$ .
- **Tw.** Nierówność Cauchy'ego-Schwarza. Każdy iloczyn skalarny spełnia następującą nierówność :

$$|B(u, v)| \leq B(u, u)^{1/2} B(v, v)^{1/2} \quad \forall u, v \in V. \quad (1)$$

## Dowód.

Rozważmy wyrażenie  $B(u - \lambda v, u - \lambda v) \geq 0$ ,  $u, v \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Ze względu na dwuliniowość i symetrię  $B$ :

$$0 \leq B(u - \lambda v, u - \lambda v) = B(u, u) - 2\lambda B(u, v) + \lambda^2 B(v, v) \quad (2)$$

Aby powyższy wielomian względem  $\lambda$  był nieujemny, jego wyróżnik musi być niedodatni:

$$\Delta = 4B(u, v)^2 - 4B(u, u)B(v, v) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad |B(u, v)| \leq B(u, u)^{1/2} B(v, v)^{1/2}. \quad (3)$$

• **Def.** Odwzorowanie  $\| \cdot \| \rightarrow \mathbb{R}_+$  jest normą w przestrzeni  $V$  jeśli:

1.  $\|u\| \geq 0 \quad \forall u \in V \quad \|u\| = 0 \iff u = 0.$

2.  $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\| \quad \forall u \in V.$

3.  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in V$  (nierówność trójkąta).

• Każdy iloczyn skalarny definiuje normę w danej przestrzeni wektorowej  $V$ :

$$\|u\|_V = B(u, u)^{1/2}. \quad (4)$$

Sprawdzamy warunki 1-3:

Ad. 1. Oczywiście.

Ad. 2.  $\|\lambda u\| = B(\lambda u, \lambda u)^{1/2} = (\lambda^2)^{1/2} B(u, u)^{1/2} = |\lambda| \|u\|.$

Ad. 3.

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= B(u + v, u + v) = B(u, u) + 2B(u, v) + B(v, v) \leq \\ &B(u, u) + 2B(u, u)^{1/2} B(v, v)^{1/2} + B(v, v) = [B(u, u)^{1/2} + B(v, v)^{1/2}]^2 = \\ &(\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

(Wykorzystaliśmy dwuliniowość, symetrię  $B$  i nierówność Cauchy'ego-Schwarza).

- Chcielibyśmy zdefiniować przestrzeń funkcji, dla których forma dwuliniowa sformułowania wariacyjnego

$$B(u, v) = \int_0^l (au'v' + bu'v + cuv)dx \quad (5)$$

przyjmuje skończoną wartość , w szczególności przy  $u = v$ , aby jej składniki były ograniczone:

$$\int_0^l au'^2 dx < \infty, \quad \left| \int_0^l bu'u dx \right| < \infty, \quad \left| \int_0^l cu^2 dx \right| < \infty. \quad (6)$$

Ponieważ  $0 < a_0 \leq a(x) \leq a_1$ , to

$$\int_0^l au'^2 dx \geq a_0 \int_0^l u'^2 dx, \quad (7)$$

i wobec tego ograniczoność pierwszego ze składników formy wymaga, aby:

$$\int_0^l u'^2 dx < \infty. \quad (8)$$

- Wymaganie to powoduje ograniczonosc pozostałych składników formy dwuliniowej  $B$ :

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u' \cdot 1 \, dx \leq |u(0)| + \left( \int_0^x u'^2 \, dx \right)^{1/2} \left( \int_0^x 1^2 \, dx \right)^{1/2} < \infty, \quad (9)$$

(gdzie zastosowaliśmy nierównosc Cauchy'ego-Schwarza), co dowodzi, że:

$$\int_0^l u^2 \, dx < \infty \quad (10)$$

oraz w konsekwencji:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^l a u' v' \, dx \right| &\leq a_1 \int_0^l |u' v'| \, dx \leq a_1 \left( \int_0^l u'^2 \, dx \right)^{1/2} \left( \int_0^l v'^2 \, dx \right)^{1/2} < \infty, \\ \left| \int_0^l b u' v \, dx \right| &\leq b_1 \int_0^l |u' v| \, dx \leq b_1 \left( \int_0^l u'^2 \, dx \right)^{1/2} \left( \int_0^l v^2 \, dx \right)^{1/2} < \infty, \\ \left| \int_0^l c u v \, dx \right| &\leq c_1 \int_0^l |u v| \, dx \leq c_1 \left( \int_0^l u^2 \, dx \right)^{1/2} \left( \int_0^l v^2 \, dx \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned} \quad (11)$$

- **Def.** Zbiór funkcji o całkowalnej w kwadracie pochodnej nazywamy przestrzenią Sobolewa  $H^1(\Omega)$  (gdzie  $\Omega = (0, l)$ ):

$$H^1(\Omega) = \left\{ u : \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} u'^2 dx < \infty \right\} \text{ z norma } \|u\|_{1,\Omega} := \left( \int_{\Omega} (u^2 + u'^2) dx \right)^{1/2}. \quad (12)$$

- Obecnie zdefiniujemy przydatne własności formy liniowej i dwuliniowej sformułowania wariacyjnego:

**Def.** Forma dwuliniowa  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists M > 0$ , takie że:

$$|B(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V. \quad (13)$$

**Def.** Forma dwuliniowa  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  jest  $V$ -koercywna  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \alpha > 0$ , takie że:

$$|B(u, u)| \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V. \quad (14)$$

**Def.** Funkcjonał liniowy  $L : V \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągły  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists C > 0$ , takie że:

$$|L(u)| \leq C \|u\|_V, \quad \forall u \in V. \quad (15)$$

Wkrótce sprawdzimy, że faktycznie formy występujące w podejściu wariacyjnym posiadają powyższe cechy.

- **Tw.** Zakładamy, że  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  jest formą dwuliniową ciągłą i  $V$ -koercywna,  $L : V \rightarrow \mathbb{R}$  funkcjonałem ciągłym. Niech  $u$  będzie rozwiązaniem zadania wariacyjnego:

$$u \in u_0 + V : \quad B(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V. \quad (16)$$

Niech  $u_h$  będzie rozwiązaniem przybliżonym w  $V_h \subset V$ :

$$u_h \in u_0 + V_h : \quad B(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (17)$$

Wówczas zachodzi oszacowanie:

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \min_{w_h \in u_0 + V_h} \|u - w_h\|_V \quad \forall w_h \in u_0 + V_h. \quad (18)$$

Dowód. W pierwszym kroku otrzymamy tzw. warunek ortogonalności błędu do funkcji testowych. Zapisujemy ścisłe i przybliżone sformułowanie wariacyjne dla wspólnej funkcji testowej  $v_h \in V_h \subset V$  i odejmujemy je od siebie stronami:

$$\begin{array}{rcl} B(u, v_h) & = & L(v_h) \\ - B(u_h, v_h) & = & L(v_h) \\ \hline B(u - u_h, v_h) & = & 0. \end{array} \quad (19)$$

- Otrzymany wynik  $B(u - u_h, v_h) = 0$  nosi właśnie nazwę warunku ortogonalności błędu  $u - u_h$  do funkcji testowych  $v_h$ . Korzystając z koercywności, warunku ortogonalności oraz ciągłości formy  $B$  możemy zapisać ciąg nierówności:

$$\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq B(u - u_h, u - u_h) + \underbrace{B(u - u_h, u_h - w_h)}_{=0} = \quad (20)$$

$$B(u - u_h, u - w_h) \leq M \|u - u_h\|_V \|u - w_h\|_V,$$

gdzie  $w_h \in u_0 + V_h$ , dzięki czemu  $u_h - w_h \in V_h$  i spełniony jest warunek ortogonalności  $B(u - u_h, u_h - w_h) = 0$ . Dzieląc otrzymaną nierówność przez  $\|u - u_h\|_V$  otrzymujemy:

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|u - w_h\|_V, \quad \forall w_h \in u_0 + V_h. \quad (21)$$

Ponieważ  $w_h$  nie występuje po lewej stronie, możemy dodatkowo wziąć minimum prawej strony względem  $w_h$ .

- Dla interpolacji wielomianami Lagrange'a  $l_i$ :  $u_I(x) = \sum_{i=1}^{p+1} u(x_i)l_i(x)$ , błąd w normie  $H^1$  można oszacować następująco:

$$\|u - u_I\|_{1,K} \leq Ch^p \|u^{(p+1)}\|_{0,K} \quad \text{gdzie} \quad \|u^{(p+1)}\|_{0,K}^2 = \int_K (u^{(p+1)})^2 dx. \quad (22)$$

- Wybierzmy po prawej stronie tezy lematu Cea jako szczególną funkcję  $w_h$  w każdym elemencie  $K$ :  $w_h = u_0 + (u - u_0)_I$ . gdzie  $u_0$  to funkcje liniowe w końcowych elementach spełniające warunki brzegowe Dirichleta, zaś  $(u - u_0)_I$  oznacza interpolant  $u - u_0$ . Wówczas lemat Cea implikuje, że:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{1,\Omega}^2 &\leq \left(\frac{M}{\alpha}\right)^2 \|u - u_I\|_{1,\Omega}^2 = \\ &\left(\frac{M}{\alpha}\right)^2 \sum_K \|u - u_I\|_{1,K}^2 \leq \left(\frac{M}{\alpha}\right)^2 C^2 \sum_{K_2} h_K^{2p} \|u^{(p+1)}\|_{0,K}^2 \leq \\ &\left(\frac{M}{\alpha}\right)^2 C^2 h^{2p} \sum_K \|u^{(p+1)}\|_{0,K}^2 \leq \left(\frac{M}{\alpha}\right)^2 C^2 h^{2p} \|u^{(p+1)}\|_{0,\Omega}^2, \end{aligned} \quad (23)$$

- Pierwiastkując otrzymaną nierówność otrzymujemy ostatecznie oszacowanie błędu metody elementów skończonych:

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{M}{\alpha} C h^p \|u^{(p+1)}\|_{0,\Omega}. \quad (24)$$

- Załóżmy, że skupiamy uwagę na wybranym problemie z oszacowaniem:

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq h^p \underbrace{\frac{M}{\alpha} C \|u^{(p+1)}\|_{0,\Omega}}_K = K \cdot h^p, \quad (25)$$

gdzie  $K$  jest stałą zależną od wybranego zadania.

- Załóżmy, że siatka składa się z  $N = l/h$  identycznych elementów stopnia  $p$ . Wówczas liczba stopni swobody ndof wynosi:

$$\text{ndof} = N \cdot p = \frac{l}{h} \cdot p \quad \text{skąd:} \quad h = \frac{l}{\text{ndof}} \cdot p. \quad (26)$$

- Oszacowanie błędu przyjmuje postać :

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \approx K \cdot h^p = K \cdot \left( \frac{l \cdot p}{\text{ndof}} \right)^p / \log_{10} \quad (27)$$

$$\underbrace{\log_{10} \|u - u_h\|_{1,\Omega}}_y \approx \underbrace{\log_{10} K + \log_{10} (lp)^p}_b - p \underbrace{\log_{10} \text{ndof}}_x$$

Widzimy, że zależność błędu od liczby stopni swobody w skali logarytmicznej jest liniowa ze współczynnikiem nachylenia  $-p$ :

$$y \approx b - p \cdot x \quad (28)$$

# Ciągłość formy $B$

- Na koniec zweryfikujemy ciągłość formy  $B$ :

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} (au'v' + bu'v + cuv) dx \right| \leq \int_{\Omega} (|au'v'| + |bu'v| + |cuv|) dx \leq \\ &a_1 \int_{\Omega} |u'v'| dx + b_1 \int_{\Omega} |u'v| dx + c_1 \int_{\Omega} |uv| dx \leq \\ &a_1 \left( \int_{\Omega} u'^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} v'^2 dx \right)^{1/2} + b_1 \left( \int_{\Omega} u'^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} v^2 dx \right)^{1/2} + \\ &c_1 \left( \int_{\Omega} u^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} v^2 dx \right)^{1/2} \leq \overbrace{(a_1 + b_1 + c_1)}^M \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}. \end{aligned} \quad (29)$$

W powyższych oszacowaniach wykorzystaliśmy nierówność Cauchy'ego-Schwarza i ograniczenia od góry funkcji  $a$ ,  $|b|$  i  $|c|$  przez  $a_1$ ,  $b_1$  i  $c_1$ .

- Ciągłość funkcjonalu liniowego:

$$|L(v)| = \left| \int_{\Omega} f v dx \right| \leq \left( \int_{\Omega} f^2 \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} v^2 \right)^{1/2} \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}. \quad (30)$$

# Koercywność formy B

- Ograniczymy się do przypadku, gdy forma dwuliniowa ma postać :

$$B(v, v) = \int_{\Omega} (av'^2 + cv^2) dx \quad (31)$$

z dodatkowym warunkiem, że  $0 < c_0 \leq c(x)$ , dla pewnego  $c_0$ .

- Mamy wówczas następujące oszacowanie:

$$B(v, v) \geq a_0 \int_{\Omega} v'^2 dx + c_0 \int_{\Omega} v^2 dx \geq \min(a_0, c_0) \|v\|_{1,\Omega}, \quad (32)$$

co dowodzi koercywności formy  $B$  w całej przestrzeni  $H^1(\Omega)$  ze stałą  $\alpha = \min(a_0, c_0) > 0$ .

- Uwagi dodatkowe:
  - Możliwe jest oszacowanie ciągłości i koercywności dla szerszej klasy problemów, niż rozpatrywane powyżej.
  - Otrzymane oszacowanie błędu MES obowiązuje, o ile funkcja  $u^{p+1}$  (tj.  $p+1$ -sza pochodna  $u$ ) jest całkowalna w kwadracie.