

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Obliczenia Elementowe

- Chcemy stworzyć praktyczne procedury obliczania elementowych macierzy sztywności i wektorów obciążenia:

$$B_{mn}^K = \int_K (a \psi'_n \psi'_m dx + b \psi'_n \psi_m + c \psi_n \psi_m) dx$$

$$L_m^K = \int_K f \psi_m dx$$
(1)

- Do wykonania operacji przybliżonego całkowania użyjemy kwadratury Gaussa:

$$\int_{\hat{K}} g(\xi) d\xi \simeq \sum_{l=1}^{N_g} g(\xi^l) w^l, \quad \hat{K} = [0, 1],$$
(2)

gdzie ξ^l, w^l oznaczają współrzędne punktów całkowania oraz wagi.

- Aby całkować po faktycznych elementach siatki K skorzystamy z faktu, że są one obrazami elementu wzorcowego $\hat{K} = [0, 1]$ w odwzorowaniu $T_K : x(\xi) = x_A + (x_B - x_A)\xi$:

$$\int_K f(x) dx = \int_{\hat{K}} \underbrace{f(x(\xi)) \frac{dx}{d\xi}}_{g(\xi)} d\xi \simeq \sum_{l=1}^{N_g} g(\xi^l) w^l$$
(3)

Skorzystaliśmy tu z całkowania przez podstawienie.

- Zastosowanie tej procedury do obliczenia elementowej macierzy sztywności przyjmuje postać:

$$B_{mn}^K = \int_K (a\psi'_n \psi'_m dx + b \psi'_n \psi_m + c \psi_n \psi_m) dx = \int_{\hat{K}} \underbrace{(a\psi'_n \psi'_m + b \psi'_n \psi_m + c \psi_n \psi_m)_{x=x(\xi)}}_{g(\xi)} \frac{dx}{d\xi} d\xi = \sum_{l=1}^{N_g} g(\xi^l) w^l. \quad (4)$$

Szczegóły obliczenia są następujące:

- Zakładamy, że funkcje a, b, c i f są dane dla $x \in [0, l]$. Argument x dla wybranego punktu całkowania ξ^l znajdziemy jako:

$$x(\xi^l) = x_A + (x_B - x_A)\xi^l, \quad \text{gdzie } K = [x_A, x_B]. \quad (5)$$

- Wartość funkcji kształtu w x odpowiadającym ξ^l znajdziemy na podstawie definicji ψ_m :

$$\psi_m(x) = \hat{\psi}_m(\xi^l(x)). \quad (6)$$

- Pochodne $\psi_m(x)$ otrzymujemy przez różniczkowanie powyższego wzoru:

$$\frac{d\psi_m}{dx} = \frac{d\hat{\psi}}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}, \quad \text{gdzie } \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{x_B - x_A} = \frac{1}{h_K}, \quad \text{ i } \frac{dx}{d\xi} = x_B - x_A. \quad (7)$$

Przykład numeryczny

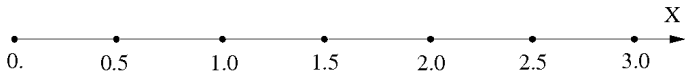
- Rozważamy zagadnienie brzegowe:

$$\begin{cases} -u'' + u = 1 & x \in (0, 3) \\ u'(0) + 2u(0) = 3, \\ u(3) = 2. \end{cases} \quad (8)$$

- Jego sformułowanie wariacyjne ma postać: Znaleźć $u(x)$ takie że $u(3) = 2$ i:

$$\int_0^3 (u'v' + uv)dx - \frac{1 \cdot 2}{1}u(0)v(0) = \int_0^3 1 v dx - \frac{1 \cdot 3}{1}v(0) \quad \forall v : v(3) = 0. \quad (9)$$

- Rozwiązanie znajdziemy na następującej siatce 6 elementów stopnia $p = 1$:



- Znajdźmy przykładowo elementową macierz sztywności i wektor obciążenia dla 5-tego elementu $K \in [2, 2\frac{1}{2}]$.

Przykład numeryczny

- Na podstawie poprzednich wzorów możemy napisać:

$$B_{ij}^K = \int_K (\psi'_i \psi'_j + \psi_i \psi_j) dx = \int_{\hat{K}} (\psi'_i \psi'_j + \psi_i \psi_j)|_{x=x(\xi)} \frac{dx}{d\xi} d\xi, \quad (10)$$

$$L_i^K = \int_K 1 \cdot \psi_i dx = \int_{\hat{K}} 1 \cdot \psi_i|_{x=x(\xi)} \frac{dx}{d\xi} d\xi.$$

- Transformacja $x(\xi)$ i jej pochodna przyjmują postać:

$$x(\xi) = 2 + \frac{1}{2}\xi, \quad \frac{dx}{d\xi} = \frac{1}{2}, \quad \frac{d\xi}{dx} = 2. \quad (11)$$

- Funkcje kształtu na elemencie wzorcowym stopnia $p = 1$:

$$\hat{\psi}_1 = 1 - \xi, \quad \frac{d\hat{\psi}_1}{d\xi} = -1, \quad \hat{\psi}_2 = \xi, \quad \frac{d\hat{\psi}_2}{d\xi} = 1. \quad (12)$$

- Pochodne funkcji kształtu na faktycznym elemencie siatki K , $\frac{d\psi_i}{dx} = \frac{d\hat{\psi}_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}$:

$$\frac{d\psi_1}{dx} = \frac{d\hat{\psi}_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = -1 \cdot 2 = -2, \quad \frac{d\psi_2}{dx} = \frac{d\hat{\psi}_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = 1 \cdot 2 = 2. \quad (13)$$

Przykład numeryczny

- Zauważmy, że $\psi_i(x(\xi)) = \hat{\psi}_i(\xi)$. Ostatecznie obliczenie B_{ij}^5 daje następujący wynik:

$$\begin{aligned} B_{1,1}^5 &= \int_0^1 [(-2) \cdot (-2) + (1 - \xi)(1 - \xi)] \frac{1}{2} d\xi = 2\frac{1}{6}, \\ B_{1,2}^5 &= \int_0^1 [(-2) \cdot 2 + (1 - \xi) \cdot \xi] \frac{1}{2} d\xi = -1\frac{11}{12}, \\ B_{2,2}^5 &= \int_0^1 (2 \cdot 2 + \xi\xi) \frac{1}{2} d\xi = 2\frac{1}{6}. \end{aligned} \quad (14)$$

Oczywiście $B_{2,1}^5 = B_{1,2}^5$ ze względu na symetrię formy biliniowej B .

- Obliczenie wektora obciążenia przyjmuje postać:

$$L_1^5 = \int_0^1 1 \cdot (1 - \xi) \cdot \frac{1}{2} d\xi = \frac{1}{4}, \quad L_2^5 = \int_0^1 1 \cdot \xi \cdot \frac{1}{2} d\xi = \frac{1}{4}. \quad (15)$$

- Zauważmy, że ponieważ współczynniki równania różniczkowego są stałe a pochodne $dx/d\xi$ są identyczne dla wszystkich elementów, powyższe obliczenie macierzy sztywności jest takie same dla wszystkich elementów.

Przykład numeryczny

- Elementowa macierz sztywności i wektor obciążenia przyjmują postać:

$$\mathbf{B}^K = \begin{bmatrix} 2\frac{1}{6} & -1\frac{11}{12} \\ -1\frac{11}{12} & 2\frac{1}{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}^K = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (16)$$

- Tylko dla pierwszego elementu musimy zmodyfikować te macierze ze względu na naturalne warunki brzegowe (wyrażone dodatkowymi składnikami arytmetycznymi oprócz całek):

$$B_{1,1}^1 = 2\frac{1}{6} - \frac{1 \cdot 2}{1} 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}, \quad L_1^1 = \frac{1}{4} - \frac{1 \cdot 3}{1} 1 = -2\frac{3}{4} \quad (17)$$

- Obecnie możemy złożyć elementowe macierze sztywności i wektory obciążenia do ich globalnych wersji stosując algorytmy składania:

```
 $F_i = 0, \quad i = 1, \dots, N$ 
for  $K = 1, \dots, K_{max}$ 
  for  $m = 1, \dots, p_K + 1$ 
     $F_{\rho(m,K)} := F_{\rho(m,K)} + L_m^K$ 
  endfor  $m$ 
endfor  $K$ 

 $K_{ij} = 0, \quad i, j = 1, \dots, N$ 
for  $K = 1, \dots, K_{max}$ 
  for  $m = 1, \dots, p_K + 1$ 
    for  $n = 1, \dots, p_K + 1$ 
       $K_{\rho(m,K),\rho(n,K)} := K_{\rho(m,K),\rho(n,K)} + B_{mn}^K$ 
    endfor  $m, n$ 
  endfor  $K$ 
```


Przykład numeryczny

$$\sum_{j=1}^6 K_{ij}u_j + K_{i,7}u_7 = F_i, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (19)$$

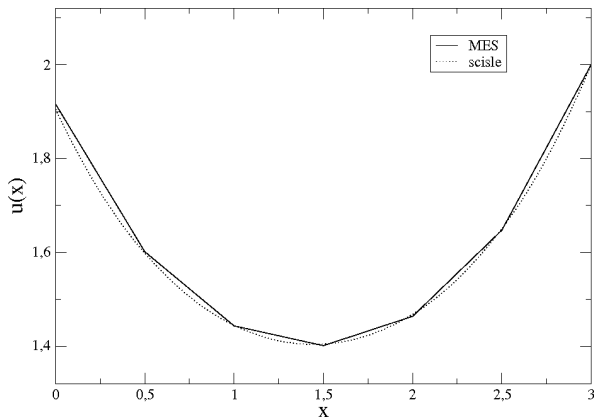
Wpływa to tylko na 6-te równanie, bo $K_{i,7} = 0$, $i = 1, \dots, 5$. Otrzymujemy więc $F_6 - K_{6,7}u_7 = \frac{1}{2} - (-1\frac{11}{12}) \cdot 2 = 4\frac{1}{3}$.

- Po opisanych wyżej modyfikacjach otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -1\frac{11}{12} & & & & & \\ -1\frac{11}{12} & 4\frac{1}{3} & -1\frac{11}{12} & & & & \\ & -1\frac{11}{12} & 4\frac{1}{3} & -1\frac{11}{12} & & & \\ & & -1\frac{11}{12} & 4\frac{1}{3} & -1\frac{11}{12} & & \\ & & & -1\frac{11}{12} & 4\frac{1}{3} & -1\frac{11}{12} & \\ & & & & -1\frac{11}{12} & 4\frac{1}{3} & \\ & & & & & -1\frac{11}{12} & 4\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 4\frac{1}{3} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Przykład numeryczny

- Przedstawiamy wykres rozwiązania przybliżonego wraz ze ścisłym:



- Można pokazać, że rozwiązanie ścisłe ma postać:

$$u(x) = 1 + \frac{\cosh 3 - 2}{\cosh 3 - 2\sinh 3} \sinh x + \frac{1 - \sinh 3}{\cosh 3 - 2\sinh 3} \cosh x. \quad (21)$$