

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
MES w 1D. Element Lagrange'a stopnia $p \geq 1$.
Algorytmy składania macierzy globalnych

Warunki brzegowe

- Dotąd mówiąc o sformułowaniu wariacyjnym zakładaliśmy, że $\alpha_0 \neq 0$ i $\alpha_l \neq 0$. Jeśli $\alpha_0 = 0$ i $\alpha_l = 0$, to $\beta_0 \neq 0$ i $\beta_l \neq 0$, aby spełnić $\alpha_0^2 + \beta_0^2 > 0$ i $\alpha_l^2 + \beta_l^2 > 0$. Pozwala to zapisać warunki brzegowe w następującej postaci:

$$u(0) = \gamma_0/\beta_0 := u_0, \quad u(l) = \gamma_l/\beta_l := u_l, \quad (1)$$

Ta postać nazywa się podstawowymi warunkami brzegowymi (lub typu Dirichleta) w odróżnieniu od przypadku $\alpha_0 \neq 0$ i $\alpha_l \neq 0$, kiedy to mówimy o naturalnych warunkach brzegowych. Te ostatnie zaś dodatkowo nazywa się warunkami typu Cauchy'ego, gdy $\beta_0 \neq 0$, $\beta_l \neq 0$, oraz warunkami typu Neumanna, gdy $\beta_0 = 0$, $\beta_l = 0$:

naturalne warunki brzegowe:

$$\alpha_0 u'(0) + \beta_0 u(0) = \gamma_0, \quad \alpha_l u'(l) + \beta_l u(l) = \gamma_l \quad - \text{typu Cauchy'ego}$$

$$\alpha_0 u'(0) = \gamma_0 \quad \alpha_l u'(l) = \gamma_l \quad - \text{typu Neumanna}$$

podstawowe warunki brzegowe (lub typu Dirichleta):

$$u(0) = u_0 \quad u(l) = u_l.$$

Sformułowanie wariacyjne

- W przypadku podstawowych warunków brzegowych nie da się wyrazić z nich pochodnych rozwiązania przy konstruowaniu sformułowania słabego w wyciąkowanym przez części składniku:

$$-(au'v)|_0^l.$$

Aby uniknąć tej konieczności przyjmujemy funkcje testowe v znikające w $x = 0$ i $x = l$, co eliminuje ten wyraz. Jednak eliminuje to też obecność warunków brzegowych w sformułowaniu. Dlatego musimy z góry przyjąć, że szukamy rozwiązania w zbiorze funkcji spełniających te warunki pisząc: znaleźć $u(x)$ takie, że $u(0) = u_0$, $u(l) = u_l$ oraz

$$\int_0^l (au'v' + bv'v + cuv) dx = \int_0^l fv dx \quad \forall v \text{ takich, że } v(0) = 0, v(l) = 0.$$

- W przypadku mieszanych warunków brzegowych, np. naturalnych w $x = 0$ a podstawowych w $x = l$, powyższy przepis stosujemy tylko dla brzegu Dirichleta: znaleźć $u(x)$ takie że $u(l) = u_l$ oraz

$$\int_0^l (au'v' + bu'v + cuv) dx - \frac{a(0)\beta_0}{\alpha_0} u(0)v(0) = \int_0^l fv dx - \frac{a(0)\gamma_0}{\alpha_0} v(0) \quad \forall v(l) = 0.$$

Przykład

- Rozważmy następujący problem brzegowy:

$$\begin{cases} -[(2 + \sin x)u']' + u = x^2 & x \in (0, 5) \\ 2u'(0) + u(0) = 3, \\ u(5) = 2. \end{cases}$$

Dla tego zadania współczynniki są następujące:

$$\begin{aligned} a &= 2 + \sin x, & b &= 0, & c &= 1, & f &= x^2, \\ \alpha_0 &= 2, & \beta_0 &= 1, & \gamma_0 &= 3, \\ & & & & u_l &= 2. & q \end{aligned}$$

Wobec tego sformułowanie wariacyjne ma postać :
znaleźć $u(x)$ takie że $u(5) = 2$ oraz

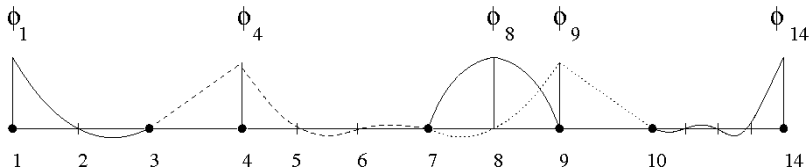
$$\int_0^5 \underbrace{[(2 + \sin x)u'v' + uv]dx - \frac{(2 + \sin 0) \cdot 1}{2}u(0)v(0)}_{B(u,v)} =$$
$$\int_0^5 \underbrace{x^2 v dx - \frac{(2 + \sin 0) \cdot 3}{2}v(0)}_{L(v)} \quad \forall v : v(5) = 0.$$

MES z aproksymacją wyższego stopnia

- Poprzednio zakładaliśmy, że funkcje kształtu są w elementach liniowe. Obecnie dopuścimy wielomiany stopnia $p \geq 1$.
- W tym celu wprowadzamy dodatkowo do każdego z elementów Ω_i liczbę n_i równomiernie rozłożonych punktów (łącznie z końcami), zwanych dalej węzłami. Zdefiniujemy funkcję kształtu ϕ_i tak, aby w każdym z elementów była wielomianem możliwie najniższego stopnia, który przyjmuje w i -tym węźle wartość 1 a znika w pozostałych.

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = j \\ 0, & \text{gdy } i \neq j \end{cases} = \delta_{ij},$$

- Wymaganie to oznacza, że w elemencie zawierającym węzeł x_i funkcja ϕ_i musi być wielomianem Lagrange'a stopnia $p_i = n_i - 1$. W elementach nie zawierających węzła x_i funkcja ϕ_i tożsamościowo znika. Przykłady funkcji kształtu pokazuje rysunek.



MES $p \geq 1$

- Przyjęcie założenia, że $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, ma istotną zaletę. Jeśli przedstawimy rozwiązanie jako kombinację funkcji kształtu: $u_h(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i(x)$, to parametry α_i można interpretować jako wartości rozwiązania w węzłach x_i :

$$u_h(x_j) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i(x_j) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j,$$

co pozwala na łatwą intuicyjną interpretację stopni swobody.

- Wielomiany Lagrange'a definiuje się w MES dwustopniowo: w pierwszym kroku na odcinku jednostkowym $\hat{K} = [0, 1]$ zwanym elementem wzorcowym, z węzłami $\xi_i = \frac{i-1}{p}, i = 1, \dots, p+1$.

Wielomian, który znika we wszystkich węzłach prócz i -tego ma postać

$$(\xi - \xi_1) \dots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_n)$$

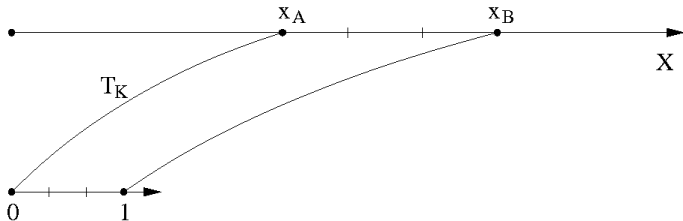
Aby dodatkowo sprawić, że jego wartość w ξ_i wynosi 1, wystarczy to wyrażenie podzielić przez jego wartość w ξ_i :

$$\hat{\psi}_i(x) = \frac{(\xi - \xi_1) \dots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_1) \dots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \dots (\xi_i - \xi_n)} \quad (2)$$

MES $p \geq 1$

- W drugim kroku utworzymy wielomiany Lagrange'a $\psi_i(x)$ na faktycznym elemencie $K = [x_A, x_B]$, zakładając, że jest on obrazem \hat{K} w odwzorowaniu:

$$T_K : x(\xi) = x_A + (x_B - x_A)\xi, \quad \xi \in \hat{K}. \quad (3)$$



Obrazy węzłów ξ_i elementu \hat{K} , $x(\xi_i)$, pokrywają się z węzłami elementu rzeczywistego, gdyż jedno i drugie są równomiernie rozłożone.

Z tego względu wielomian Lagrange'a na K możemy zapisać jako złożenie:

$$\psi_i(x) = \hat{\psi}_i(\xi(x)), \quad \text{gdzie: } \xi(x) = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \text{ jest odwzorowaniem } T_K^{-1}.$$

- Powyższą konstrukcję $\psi_i(x)$ określa się jako *element parametryczny*.

Wielominy Lagrange'a

- Przykład: $n = 2$, $p = 1$ – wielomian liniowy:

$$\hat{\psi}_1(x) = \frac{\xi - 1}{0 - 1}, \quad \hat{\psi}_2(x) = \frac{\xi - 0}{1 - 0}$$

- Przykład: $n = 4$, $p = 3$ – wielomian 3 stopnia:

$$\hat{\psi}_1(\xi) = \frac{(\xi - \frac{1}{3})(\xi - \frac{2}{3})(\xi - 1)}{(0 - \frac{1}{3})(0 - \frac{1}{3})(0 - 1)}, \quad \hat{\psi}_2(x) = \frac{(\xi - 0)(\xi - \frac{2}{3})(\xi - 1)}{(\frac{1}{3} - 0)(\frac{1}{3} - \frac{2}{3})(\frac{1}{3} - 1)}$$

$$\hat{\psi}_3(x) = \frac{(\xi - 0)(\xi - \frac{1}{3})(\xi - 1)}{(\frac{2}{3} - 0)(\frac{2}{3} - \frac{1}{3})(\frac{2}{3} - 1)}, \quad \hat{\psi}_4(\xi) = \frac{(\xi - 0)(\xi - \frac{1}{3})(\xi - \frac{2}{3})}{(1 - 0)(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{2}{3})}$$

- Przykład dla $n = 5$, $p = 4$:

$$\hat{\psi}_1 = \frac{(\xi - \frac{1}{4})(\xi - \frac{2}{4})(\xi - \frac{3}{4})(\xi - 1)}{(0 - \frac{1}{4})(0 - \frac{2}{4})(0 - \frac{3}{4})(0 - 1)}, \quad \hat{\psi}_2 = \frac{(\xi - 0)(\xi - \frac{2}{4})(\xi - \frac{3}{4})(\xi - 1)}{(\frac{1}{4} - 0)(\frac{1}{4} - \frac{2}{4})(\frac{1}{4} - \frac{3}{4})(\frac{1}{4} - 1)},$$

$$\hat{\psi}_3 = \frac{(\xi - 0)(\xi - \frac{1}{4})(\xi - \frac{3}{4})(\xi - 1)}{(\frac{2}{4} - 0)(\frac{2}{4} - \frac{1}{4})(\frac{2}{4} - \frac{3}{4})(\frac{2}{4} - 1)}, \quad \hat{\psi}_4 = \frac{(\xi - 0)(\xi - \frac{1}{4})(\xi - \frac{2}{4})(\xi - 1)}{(\frac{3}{4} - 0)(\frac{3}{4} - \frac{1}{4})(\frac{3}{4} - \frac{2}{4})(\frac{3}{4} - 1)},$$

$$\hat{\psi}_5 = \frac{(\xi - 0)(\xi - \frac{1}{4})(\xi - \frac{2}{4})(\xi - \frac{3}{4})}{(1 - 0)(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{2}{4})(1 - \frac{3}{4})}.$$

Algorytm składania macierzy sztywności

- Użyteczność metody elementów skończonych wynika z możliwości sformułowania jej za pomocą algorytmów. Poniżej przedstawiamy jeden z nich: składanie globalnych macierzy \mathbf{K} i \mathbf{L} z ich odpowiedników elementowych.
- Globalne funkcje kształtu ϕ_i są w poszczególnych elementach wielomianami Lagrange'a, elementowymi funkcjami kształtu ψ_m (bądź trywialnie znikają):

$$\phi_{i|K} = \psi_m. \quad (4)$$

- Możemy ustalić związek między numeracją funkcji globalnych oraz numeracją funkcji elementowych. Oznaczmy symbolem $\sigma(i, K)$ numer elementowej funkcji kształtu w elemencie K , która składa się na i -tą funkcję globalną ϕ_i :

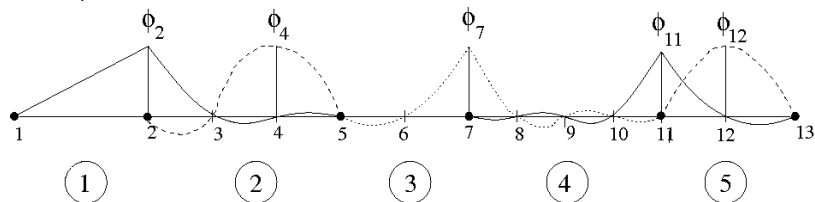
$$\phi_{i|K} = \psi_{\sigma(i,K)} \quad (5)$$

- Analogicznie, niech symbol $\rho(m, K)$ oznacza numer globalnej funkcji kształtu, na którą składa się m -ta elementowa funkcja kształtu ψ_m w elemencie K :

$$\psi_m = \phi_{\rho(m,K)|K}. \quad (6)$$

Przykład

- Rozważamy siatkę przedstawioną na rysunku. Składa się ona z 5 elementów i 13 węzłów.



- Niektóre wartości macierzy $\sigma(i, K)$ oraz $\rho(m, K)$ są następujące:

$$\begin{aligned}\sigma(2, 1) &= 2, & \sigma(2, 2) &= 1, & \sigma(4, 2) &= 3, & \sigma(7, 3) &= 3, \\ \rho(2, 1) &= 2, & \rho(1, 2) &= 2, & \rho(3, 2) &= 4, & \rho(3, 3) &= 7.\end{aligned}$$

- Przykładowo chcąc znaleźć $\sigma(4, 2)$ sprawdzamy, że 4 globalna funkcja kształtu jest 3 funkcją kształtu w elemencie 2 (4 globalny węzeł jest 3 węzłem 2 elementu), więc $\sigma(4, 2) = 3$.
- Chcąc znaleźć $\rho(3, 3)$ sprawdzamy, że 3 funkcja kształtu elementu 3 składa się na 7 globalną funkcję kształtu (3 węzeł elementu 3 jest globalnym 7 węzłem), więc $\rho(3, 3) = 7$.

Algorytm składania

- Skorzystamy z możliwości rozbitcia całkowania po odcinku $[0, l]$ na sumę całek po elementach.
- Skupmy uwagę na składniku wektora obciążenie F_i wyrażonym za pomocą całki:

$$F_i = \int_0^l f \phi_i dx = \sum_{K:\phi_i \neq 0} \int_K f \phi_i|_K dx = \sum_{K:\phi_i \neq 0} \int_K f \psi_{\sigma(i,K)} dx = \sum_{K:\phi_i \neq 0} L_{\sigma(i,K)}^K$$

gdzie

$$L_m^K := \int_K f \psi_m dx \quad \text{nazywamy elementowym wektorem obciążenia.}$$

- Ostatecznie:

$$F_i = \sum_{K:\phi_i \neq 0} L_{\sigma(i,K)}^K, \quad i = 1, \dots, N. \quad (7)$$

Algorytm składania

- Wzór ten możemy przedstawić w postaci algorytmu po lewej stronie:

```
 $F_i = 0, \quad i = 1, \dots, N$   
for  $i = 1, \dots, N$   
  for  $K : \phi_i \neq 0$  w  $K$   
     $F_i := F_i + L_{\sigma(i,K)}^K$   
  endfor  $K$   
endfor  $i$ 
```

```
 $F_i = 0, \quad i = 1, \dots, N$   
for  $K = 1, \dots, K_{max}$   
  for  $m = 1, \dots, p_K + 1$   
     $F_{\rho(m,K)} := F_{\rho(m,K)} + L_m^K$   
  endfor  $m$   
endfor  $K$ 
```

- Ze względu na efektywność obliczeń, wygodnie jest używać wersji tego algorytmu z odwróconym porządkiem pętli: zewnętrzną po elementach K , wewnętrzną po funkcjach kształtu.
- Przy takim podejściu modyfikacji ulega postać wyrażenia prezentującego obliczenie: w pierwszej wersji znany jest numer elementu K oraz globalnej funkcji kształtu i , znajduwany zaś numer funkcji elementowej jako $\sigma(i, K)$.
- Przy odwróconym porządku pętli zaś znany jest element K i numer elementowej funkcji kształtu m , numer odpowiedniej globalnej funkcji kształtu znajdziemy jako $\rho(m, K)$. Wersję algorytmu z odwróconym porządkiem pętli przedstawiono po prawej stronie.

Przykład

- Obliczenie F_2 . Globalna funkcja kształtu ϕ_2 jest różna od zera w elementach 1 i 2, więc sumowanie przebiega po $K = 1$ i $K = 2$. W elemencie $K = 1$ globalna funkcja ϕ_2 jest 2 funkcją kształtu, a w elemencie $K = 2$ globalna funkcja ϕ_2 jest 1 funkcją kształtu. Wobec tego wynik sumowania ma postać:

$$F_2 = L_2^1 + L_1^2.$$

- Obliczenie F_4 . Globalna funkcja kształtu ϕ_4 jest różna od zera tylko w elemencie 2, więc sumowanie sprowadza się do elementu $K = 2$. W elemencie $K = 2$ globalna funkcja ϕ_4 jest 3 funkcją kształtu. Wobec tego wynik sumowania ma postać:

$$F_4 = L_3^2.$$

- Zauważmy, że dla węzłów oddzielających elementy wyraz wektora obciążenia jest sumą elementowych wyrazów wektorów z dwu sąsiednich elementów. Dla węzłów wewnętrznych elementu wyraz globalnego wektora obciążenia jest odpowiednim wyrazem elementowego wektora obciążenia.

Składanie macierzy sztywności

- Analogicznie możemy rozumować z macierzą sztywności. Załóżmy, że forma B wyraża się przez całkę, którą rozbijemy na składniki z poszczególnych elementów:

$$K_{ij} = B(\phi_j, \phi_i) = \sum_{K:\phi_i, \phi_j \neq 0} \int_K (a\phi'_{j|K}\phi'_{i|K} + b\phi'_{j|K}\phi_{i|K} + c\phi_{j|K}\phi_{i|K})dx =$$

$$\sum_{K:\phi_i, \phi_j \neq 0} \int_K (a\psi'_{\sigma(j,K)}\psi'_{\sigma(i,K)} + b\psi'_{\sigma(j,K)}\psi_{\sigma(i,K)} + c\psi_{\sigma(j,K)}\psi_{\sigma(i,K)})dx =$$

$$\sum_{K:\phi_i, \phi_j \neq 0} B_{\sigma(i,K), \sigma(j,K)}^K,$$

gdzie

$$B_{m,n}^K = \int_K (a\psi'_n\psi'_m + b\psi'_n\psi_m + c\psi_n\psi_m)dx \text{ to elementowa macierz sztywności}$$

- Ostatecznie:

$$K_{ij} = \sum_{K:\phi_i, \phi_j \neq 0} B_{\sigma(i,K), \sigma(j,K)}^K, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (8)$$

Algorytmy składania

- Jak i poprzednio wyrażenie to możemy przedstawić za pomocą algorytmu składania globalnej macierzy sztywności w dwu wersjach różniących się porządkiem pętli, wersjach pokazanych po lewej i prawej stronie:

```
 $K_{ij} = 0, \quad i, j = 1, \dots, N$   
for  $i = 1, \dots, N$   
  for  $j = 1, \dots, N$   
    for  $K : \phi_i, \phi_j \neq 0$  w  $K$   
       $K_{ij} := K_{ij} + B_{\sigma(i,K),\sigma(j,K)}^K$   
    endfor  $K$   
  endfor  $i, j$ 
```

```
 $K_{ij} = 0, \quad i, j = 1, \dots, N$   
for  $K = 1, \dots, K_{max}$   
  for  $m = 1, \dots, p_K + 1$   
    for  $n = 1, \dots, p_K + 1$   
       $K_{\rho(m,K),\rho(n,K)} := K_{\rho(m,K),\rho(n,K)} + B_{mn}^K$   
    endfor  $m, n$   
  endfor  $K$ 
```

Przykłady zastosowania algorytmu składania

- Obliczenie $K_{2,2}$. Globalna funkcja kształtu ϕ_2 jest różna od zera w elementach $\{1, 2\}$, stąd sumowanie przebiega po tym zbiorze wartości K . Biorąc pod uwagę, że elementowe numery tej funkcji w tychże elementach to 2 i 1 znajdujemy, że:

$$K_{2,2} = B_{2,2}^1 + B_{1,1}^2$$

Obliczenie $K_{2,4}$. Globalna funkcja kształtu ϕ_2 jest różna od zera w elementach $\{1, 2\}$, zaś ϕ_4 tylko w elemencie $\{2\}$, stąd sumowanie ogranicza się do części wspólnej tych zbiorów, tj. elementu $\{2\}$. Biorąc pod uwagę elementowe numery funkcji ϕ_2 i ϕ_4 w tym elemencie znajdujemy, że:

$$K_{2,4} = B_{1,3}^2$$

Obliczenie $K_{2,6}$. Globalna funkcja kształtu ϕ_2 jest różna od zera w elementach $\{1, 2\}$, zaś ϕ_6 w elemencie $\{3\}$. Nie ma więc wspólnych elementów, gdzie te dwie funkcje byłyby niezerowe, zbiór sumowania w algorytmie jest pusty, stąd:

$$K_{2,6} = 0.$$