

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Obliczenia elementowe: element trójkątny

Obliczenia elementowe – trójkąt

- Elementowe macierze sztywności i wektory obciążenia mają postać:

$$B_{mn}^K = \int_K (k \nabla \psi_n \cdot \nabla \psi_m + b \psi_n \psi_m) dx + \int_{\Gamma_C \cap \partial K} p \psi_n \psi_m dS,$$
$$L_m^K = \int_K f \psi dx + \int_{\Gamma_C \cap \partial K} p \hat{u} \psi_m dS + \int_{\Gamma_N \cap \partial K} \hat{\sigma} \psi_m dS.$$

- Podobnie jak w przypadku kwadratu do całkowania będziemy wykorzystywać kwadraturę Gaussa wyrażoną teraz za pomocą współrzędnych barocentrycznych ζ^l punktów całkowania oraz związanych z nimi wag w^l :

$$\int_{\hat{K}} g(\xi) d\xi \approx \sum_{l=1}^{N_g} g(\zeta^l) w^l, \text{ gdzie } \hat{K} - \text{trójkąt } \xi_1 \in [0, 1], \xi_2 \in [0, 1 - \xi_1] / \text{element wzorcowy.}$$

- Jak i dla czworokąta, B_{mn}^K i L_m^K wyrażają się przez składniki w postaci całek podwójnych i pojedynczych, dla których konieczne są osobne procedury:

$$\hat{B}_{mn}^K = \int_K (k \nabla \psi_n \cdot \nabla \psi_m + b \psi_n \psi_m) dx, \quad \check{B}_{mn}^K = \int_{\Gamma_C \cap \partial K} p \psi_n \psi_m dS,$$
$$\hat{L}_m^K = \int_K f \psi_m dx, \quad \check{L}_m^K = \int_{\Gamma_C \cap \partial K} p \hat{u} \psi_m dS + \int_{\Gamma_N \cap \partial K} \hat{\sigma} \psi_m dS.$$

- Formalnie procedura całkowania dla elementu trójkątnego jest analogiczna, jak dla elementu czworokątnego:

aby wykonać całkowanie numeryczne po elemencie K za pomocą kwadratury Gaussa, stosujemy całkowanie przez podstawienie biorąc pod uwagę fakt, że element K jest obrazem $\hat{K}$ w odwzorowaniu $T_K : \mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$:

$$B_{mn}^K = \int_K (k \nabla \psi_n \cdot \nabla \psi_m + b \psi_n \psi_m) dx = \int_{\hat{K}} \underbrace{(k \nabla \psi_n \cdot \nabla \psi_m + b \psi_n \psi_m)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})} \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)}}_{g(\boldsymbol{\xi})} d\boldsymbol{\xi} \approx \sum_{l=1}^{N_g} g(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\zeta}^l)) w^l.$$

gdzie $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\zeta}) : \xi_1 = \zeta_2, \xi_2 = \zeta_3$. Wykorzystaliśmy tu jacobian odwzorowania T_K :

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix},$$

oznaczany też często przez J . Odwzorowanie T_K projektuje się najczęściej tak że $J > 0$. W przeciwnym razie uwzględniamy w całkowaniu $|J|$.

Detale – element trójkątny

- Jak i dla czworokąta, całkowanie według przedstawionego wzoru wymaga obliczania wartości funkcji podcałkowej w kolejnych punktach całkowania. **Różnica polega na wyborze punktów całkowania ξ^l jako $\xi^l = \xi(\zeta^l)$,** gdzie ζ^l to punkty Gaussa na trójkącie, zaś $\xi(\zeta)$: $\xi_1 = \zeta_2$, $\xi_2 = \zeta_3$. Realizacja tych obliczeń jest następująca:
- Położenie x punktu na elemencie rzeczywistym K odpowiadające punktowi całkowania $\xi^l = \xi(\zeta^l)$ obliczamy według definicji odwzorowania T_K :

$$x(\xi^l) = \sum_{i=1}^n \hat{\psi}_i(\xi^l) x^i,$$

gdzie x^i oznacza współrzędne węzłów elementu.

- Wartości funkcji kształtu w punkcie całkowania $x(\xi^l)$ zgodnie z definicją pokrywają się z wartościami funkcji kształtu na $\hat{K}$ w ξ^l :

$$\psi_m(x(\xi^l)) = \hat{\psi}_m(\xi^l).$$

Oczywiście możemy wymiennie używać współrzędnych kartezjańskich ξ lub polowych ζ według ich relacji: $\xi_1 = \zeta_2$, $\xi_2 = \zeta_3$ (oraz $\zeta_1 = 1 - \xi_1 - \xi_2$).

- Powtarzamy w 100% kroki procedury znanej nam dla czworokąta:
- Wartości pochodnych funkcji kształtu $\psi_m(\mathbf{x})$ względem współrzędnych x na elemencie rzeczywistym K otrzymujemy różniczkując obustronnie definicję $\psi_m(\mathbf{x}) = \hat{\psi}_m(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}))$ i korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonej w wielu wymiarach:

$$\psi_m(\mathbf{x}) = \hat{\psi}_m(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})), \quad \left/ \frac{\partial}{\partial x_i} \right.$$

$$\frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \hat{\psi}_m}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}.$$

- Występujące tu pochodne $\partial \xi_j / \partial x_i$ obliczamy korzystając z faktu, że macierz jacobianowa pochodnych odwzorowania odwrotnego T_K^{-1} jest macierzą odwrotną do macierzy jacobianowej dla T_K . W pierwszym kroku obliczamy więc pochodne odwzorowania T_K w punkcie całkowania:

$$\frac{\partial x_k}{\partial \xi_l} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi_l} x_k^i, \quad k, l = 1, 2.$$

W drugim kroku zaś obliczamy macierz poszukiwanych pochodnych jako macierz odwrotną do obliczonej powyżej:

$$\left\{ \frac{\partial \xi_k}{\partial x_l} \right\}_{k,l=1,2} = \left\{ \frac{\partial x_k}{\partial \xi_l} \right\}_{k,l=1,2}^{-1}.$$

- Jakobian obliczamy jako wyznacznik macierzy $\partial x_i / \partial \xi_j$:

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)} = \det \left\{ \frac{\partial x_k}{\partial \xi_l} \right\}_{k,l=1,2}.$$

Obliczenie tego wyznacznika dokonuje się podczas odwracania $\partial x_i / \partial \xi_j$.

- Pewną różnicę dla trójkąta w porównaniu z elementem czworokątnym stanowi sposób obliczania pochodnych funkcji kształtu $\frac{\partial \hat{\psi}_m}{\partial \xi_i}$, gdyż jak widzieliśmy, przedstawia się je za pomocą współrzędnych barocentrycznych ζ a nie kartezjańskich ξ .
- Można tu wykorzystać różniczkowanie funkcji złożonej:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_m(\xi) &= \hat{\psi}_m(\zeta(\xi)) \quad \bigg/ \quad \frac{\partial}{\partial \xi_i} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_m}{\partial \xi_i} &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \hat{\psi}_m}{\partial \zeta_j} \frac{\partial \zeta_j}{\partial \xi_i}. \end{aligned}$$

gdzie $\zeta_1 = 1 - \xi_1 - \xi_2$, $\zeta_2 = \xi_1$, $\zeta_3 = \xi_2$ więc:

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi_1} = -1, \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi_2} = -1, \quad \frac{\partial \zeta_2}{\partial \xi_1} = 1, \quad \frac{\partial \zeta_2}{\partial \xi_2} = 0, \quad \frac{\partial \zeta_3}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial \zeta_3}{\partial \xi_2} = 1.$$

Obliczenia elementowe – składniki brzegowe

- Rozważmy obecnie drugi składnik elementowej macierzy sztywności wyrażający się za pomocą całki po brzegu elementu:

$$\check{B}_{mn}^K = \int_{\Gamma_C \cap \partial K} p \psi_n \psi_m dS.$$

- Powtarzamy tu znów w dużej części procedurę dla czworokąta:**

"Jest to całka krzywoliniowa nieorientowana. Procedura jej obliczania sprowadza się do przedstawienia jej jako zwyczajnej całki oznaczonej z zastosowaniem parametryzacji odcinka brzegu $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in [0, 1]$, a następnie przybliżeniu całki oznaczonej za pomocą jednowymiarowej kwadratury Gaussa:"

$$\begin{aligned} \check{B}_{mn}^K &= \int_{\Gamma_C \cap \partial K} p \psi_n \psi_m dS = \int_0^1 \underbrace{(p \psi_n \psi_m) |_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2}}_{g(t)} dt \approx \\ &\approx \sum_{l=1}^{N_g} g(t^l) w^l, \end{aligned}$$

- Parametry t^l i w^l są odpowiednio punktami całkowania i wagami jednowymiarowej kwadratury Gaussa, zaś parametryzacja brzegu ∂K jest obcięciem odwzorowania T_K do boku elementu wzorcowego $\hat{K}$ odpowiadającego ∂K .

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^N \hat{\psi}_i(\boldsymbol{\xi}(t)) \mathbf{x}^i.$$

Dla kolejnych boków trójkąta można przyjąć tę parametryzację zakładając następujące opisy $\boldsymbol{\xi}(t)$:

$(\xi_1, \xi_2) = (t, 0)$, $t \in [0, 1]$ na poziomej przyprostokątnej elementu wzorcowego,

$(\xi_1, \xi_2) = (0, t)$, $t \in [0, 1]$ na pionowej przyprostokątnej elementu wzorcowego,

$(\xi_1, \xi_2) = (t, 1 - t)$, $t \in [0, 1]$ na jego przeciwprostokątnej.

- Obliczenia elementowe zilustrujemy na przykładzie następującej formy dwuliniowej i funkcjonału liniowego:

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad L(v) = \int_{\Gamma_N} 1 \cdot v \, dS.$$

przy czym pozioma przyprostokątna trójkąta wzorcowego odpowiada brzegowi Γ_N . W całkowaniu 2D zastosujemy jednopunktową kwadraturę Gaussa z punktem całkowania i wagą: $\boldsymbol{\zeta}^1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $w^1 = \frac{1}{2}$.

Obliczenia elementowe – przykład

- Obliczenia przeprowadzimy dla elementu trójkątnego stopnia $p = 1$, którego węzły (wierzchołki) mają następujące położenia:

$$\mathbf{x}^1 = (2, 1), \quad \mathbf{x}^2 = (6, 2), \quad \mathbf{x}^3 = (1, 4).$$

- Przypomnijmy wpierw liniowe funkcje kształtu na trójkącie wzorcowym:

$$\hat{\psi}_1(\xi_1, \xi_2) = \zeta_1 = 1 - \xi_1 - \xi_2, \quad \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial \xi_1} = -1, \quad \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial \xi_2} = -1,$$

$$\hat{\psi}_2(\xi_1, \xi_2) = \zeta_2 = \xi_1, \quad \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial \xi_1} = 1, \quad \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial \xi_2} = 0,$$

$$\hat{\psi}_3(\xi_1, \xi_2) = \zeta_3 = \xi_2, \quad \frac{\partial \hat{\psi}_3}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\psi}_3}{\partial \xi_2} = 1.$$

- Plan obliczeń jest następujący:

$$1. \quad \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}), \quad \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}, \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial (x_1, x_2)}{\partial (\xi_1, \xi_2)} = J,$$

$$2. \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_j}, \quad B_{mn}^K.$$

Obliczenia elementowe – przykład

- Obliczymy wartości odwzorowania $x(\xi)$ i jego pochodnych:

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^3 \hat{\psi}_i(\xi) x^i, \text{ gdzie } x^1 = (2, 1), \quad x^2 = (6, 2), \quad x^3 = (1, 4).$$

- Dla współrzędnej x_1 :

$$x_1(\xi_1, \xi_2) = 2 \cdot (1 - \xi_1 - \xi_2) + 6 \cdot \xi_1 + 1 \cdot \xi_2$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} = 2 \cdot (-1) + 6 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 4,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} = 2 \cdot (-1) + 6 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = -1.$$

- Dla współrzędnej x_2 :

$$x_2(\xi_1, \xi_2) = 1 \cdot (1 - \xi_1 - \xi_2) + 2 \cdot \xi_1 + 4 \cdot \xi_2,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 1,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 3.$$

- Otrzymaliśmy więc:

$$\left\{ \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right\} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \det = 4 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 = 13 = J,$$

$$\left\{ \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right\} = \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right\}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{-1}{13} & \frac{4}{13} \end{bmatrix}$$

- Pochodne funkcji kształtu względem współrzędnych kartezjańskich x_1, x_2 :

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = (-1) \cdot \frac{3}{13} + (-1) \cdot \frac{-1}{13} = -\frac{2}{13},$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = (-1) \cdot \frac{1}{13} + (-1) \cdot \frac{4}{13} = -\frac{5}{13}.$$

- Obliczenie wyrazu macierzy sztywności $\hat{B}_{1,1}^K$:

$$\hat{B}_{1,1}^K = \int_K \nabla \psi_1 \cdot \nabla \psi_1 \, dx = \int_{\hat{K}} \underbrace{(\nabla \psi_1 \cdot \nabla \psi_1 \cdot J)}_{g(\boldsymbol{\xi})} \big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})} d\xi \approx \sum_{l=1}^{N_g} g(\boldsymbol{\xi}^l) w^l =$$

$$\underbrace{\nabla \psi_1 \cdot \nabla \psi_1 \cdot J}_{g(\boldsymbol{\xi}^1)} \big|_{\boldsymbol{\xi}=(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{-2}{13}, \frac{-5}{13} \right) \cdot \left(\frac{-2}{13}, \frac{-5}{13} \right) * 13 * \frac{1}{2} = \frac{29}{26} \approx 1.115.$$

Wektor obciążenia – całka po brzegu

- Wektor obciążenia wyraża się w naszym przykładzie przez całkę po brzegu elementu. Opis parametryczny brzegu jest następujący:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^3 \hat{\psi}_i(\boldsymbol{\xi}(t)) \mathbf{x}^i, \text{ przy } \boldsymbol{\xi}(t) = (t, 0), \text{ tj. } \xi_1 = t, \xi_2 = 0.$$

Dla współrzędnej x_1 :

$$x_1(t) = (1 - t - 0) \cdot 2 + t \cdot 6 + 0 \cdot 1 = 4t + 2, \quad \frac{dx_1}{dt} = 4.$$

Dla współrzędnej x_2 :

$$x_2(t) = (1 - t - 0) \cdot 1 + t \cdot 2 + 0 \cdot 4 = t + 1, \quad \frac{dx_2}{dt} = 1.$$

- Obliczenie $L_1^K = \check{L}_1^K$ – 1-punktowy Gauss w 1D, $\xi^1 = \frac{1}{2}, w^1 = 1$:

$$\check{L}_1^K = \int_{\partial K \cap \Gamma_N} 1 \cdot \psi_1 dS = \int_0^1 \underbrace{1 \cdot \psi_1(\boldsymbol{\xi}(t)) \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2}}_{g(t)} dt \approx$$
$$\sum_{l=1}^{N_g} g(t^l) w^l = 1 \cdot (1 - t - 0)|_{t=\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{4^2 + 1^2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{17} \approx 2.062.$$