

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Obliczenia elementowe: element czworokątny

- Przypomnijmy, że globalną macierz sztywności $\mathbf{K}$ i wektor obciążenia $\mathbf{F}$ budujemy za pomocą algorytmów składania z elementowych macierzy sztywności i wektorów obciążenia:

$$\begin{aligned} B_{mn}^K &= \int_K (k \nabla \psi_n \cdot \nabla \psi_m + b \psi_n \psi_m) dx + \int_{\Gamma_C \cap \partial K} p \psi_n \psi_m dS, \\ L_m^K &= \int_K f \psi_m dx + \int_{\Gamma_C \cap \partial K} p \hat{u} \psi_m dS + \int_{\Gamma_N \cap \partial K} \hat{\sigma} \psi_m dS. \end{aligned} \quad (1)$$

- Naszym celem jest sformułowanie efektywnych algorytmów obliczania tych wielkości. Podstawową procedurą wykorzystywaną do obliczeń będzie całkowanie numeryczne za pomocą kwadratury Gaussa, którą zapiszemy dla przypadku dwuwymiarowego następująco:

$$\int_{\hat{K}} g(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \approx \sum_{l=1}^{N_g} g(\boldsymbol{\xi}^l) w^l, \quad \text{gdzie } \hat{K} = [0, 1]^2 \text{ — kwadrat jednostkowy / element wzorcowy.} \quad (2)$$

- Zauważamy, że B_{mn}^K i L_m^K wyrażają się przez składniki w postaci całek podwójnych i pojedynczych, dla których konieczne są osobne procedury:

$$\begin{aligned} \hat{B}_{mn}^K &= \int_K (k \nabla \psi_n \cdot \nabla \psi_m + b \psi_n \psi_m) dx, & \check{B}_{mn}^K &= \int_{\Gamma_C \cap \partial K} p \psi_n \psi_m dS, \\ \hat{L}_m^K &= \int_K f \psi_m dx, & \check{L}_m^K &= \int_{\Gamma_C \cap \partial K} p \hat{u} \psi_m dS + \int_{\Gamma_N \cap \partial K} \hat{\sigma} \psi_m dS. \end{aligned} \quad (3)$$

Elementowa macierz sztywności - całka podwójna

- Aby wykonać całkowanie numeryczne po elemencie K za pomocą kwadratury Gaussa, stosujemy całkowanie przez podstawienie biorąc pod uwagę fakt, że element K jest obrazem $\hat{K}$ w odwzorowaniu $T_K : \mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$:

$$B_{mn}^K = \int_K (k \nabla \psi_n \cdot \nabla \psi_m + b \psi_n \psi_m) dx = \underbrace{\int_{\hat{K}} (k \nabla \psi_n \cdot \nabla \psi_m + b \psi_n \psi_m) \mathbf{x}=\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)} d\xi}_{g(\boldsymbol{\xi})} \approx \sum_{l=1}^{N_g} g(\boldsymbol{\xi}^l) w^l. \quad (4)$$

gdzie wykorzystaliśmy jacobian odwzorowania T_K :

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

oznaczany też często przez J . Odwzorowanie T_K projektuje się najczęściej tak że $J > 0$. W przeciwnym razie uwzględniamy w całkowaniu $|J|$.

- Całkowanie według przedstawionego wzoru wymaga obliczania wartości funkcji podcałkowej w kolejnych punktach całkowania. Realizacja tych obliczeń jest następująca:
- Położenie $\mathbf{x}$ punktu na elemencie rzeczywistym K odpowiadające punktowi całkowania $\boldsymbol{\xi}^l$ obliczamy według definicji odwzorowania T_K :

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}^l) = \sum_{i=1}^n \hat{\psi}_i(\boldsymbol{\xi}^l) \mathbf{x}^i, \quad (6)$$

gdzie $\mathbf{x}^i$ oznacza współrzędne węzłów elementu.

- Wartości funkcji kształtu w punkcie całkowania $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}^l)$ zgodnie z definicją pokrywają się z wartościami funkcji kształtu na $\hat{K}$ w $\boldsymbol{\xi}^l$:

$$\psi_m(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}^l)) = \hat{\psi}_m(\boldsymbol{\xi}^l). \quad (7)$$

- Wartości pochodnych funkcji kształtu $\psi_m(\mathbf{x})$ względem współrzędnych $\mathbf{x}$ na elemencie rzeczywistym K otrzymujemy różniczkując obustronnie definicję $\psi_m(\mathbf{x}) = \hat{\psi}_m(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}))$ i korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonej w wielu wymiarach:

$$\psi_m(\mathbf{x}) = \hat{\psi}_m(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})), \quad \left/ \frac{\partial}{\partial x_i} \right. \quad (8)$$

$$\frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \hat{\psi}_m}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}.$$

- Występujące tu pochodne $\partial \xi_j / \partial x_i$ obliczamy korzystając z faktu, że macierz jacobianowa pochodnych odwzorowania odwrotnego T_K^{-1} jest macierzą odwrotną do macierzy jacobianowej dla T_K . W pierwszym kroku obliczamy więc pochodne odwzorowania T_K w punkcie całkowania:

$$\frac{\partial x_k}{\partial \xi_l} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi_l} x_k^i, \quad k, l = 1, 2. \quad (9)$$

W drugim kroku zaś obliczamy macierz poszukiwanych pochodnych jako macierz odwrotną do obliczonej powyżej:

$$\left\{ \frac{\partial \xi_k}{\partial x_l} \right\}_{k,l=1,2} = \left\{ \frac{\partial x_k}{\partial \xi_l} \right\}_{k,l=1,2}^{-1}. \quad (10)$$

- Jakobian obliczamy jako wyznacznik macierzy $\partial x_i / \partial \xi_j$:

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)} = \det \left\{ \frac{\partial x_k}{\partial \xi_l} \right\}_{k,l=1,2}. \quad (11)$$

Obliczenie tego wyznacznika dokonuje się podczas odwracania $\partial x_i / \partial \xi_j$.

- Rozważmy obecnie drugi składnik elementowej macierzy sztywności wyrażający się za pomocą całki po brzegu elementu:

$$\check{B}_{mn}^K = \int_{\Gamma_C \cap \partial K} p \psi_n \psi_m dS. \quad (12)$$

Jest to całka krzywoliniowa nieorientowana. Procedura jej obliczania sprowadza się do przedstawienia jej jako zwyczajnej całki oznaczonej z zastosowaniem parametryzacji odcinka brzegu $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in [0, 1]$, a następnie przybliżeniu całki oznaczonej za pomocą jednowymiarowej kwadratury Gaussa:

$$\begin{aligned} \check{B}_{mn}^K &= \int_{\Gamma_C \cap \partial K} p \psi_n \psi_m dS = \int_0^1 \underbrace{(p \psi_n \psi_m) |_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2}}_{g(t)} dt \approx \\ &\approx \sum_{l=1}^{N_g} g(t^l) w^l, \end{aligned} \quad (13)$$

Przykład

- Parametry t^l i w^l są odpowiednio punktami całkowania i wagami jednowymiarowej kwadratury Gaussa, zaś parametryzacja brzegu ∂K jest obcięciem odwzorowania T_K do boku elementu wzorcowego $\hat{K}$ odpowiadającego ∂K . Przykładowo, jeśli jest to prawy pionowy bok $\hat{K}$, to

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^N \hat{\psi}_i(\boldsymbol{\xi}(t)) \mathbf{x}^i, \quad (\xi_1, \xi_2) = (1, t), \quad t \in [0, 1]. \quad (14)$$

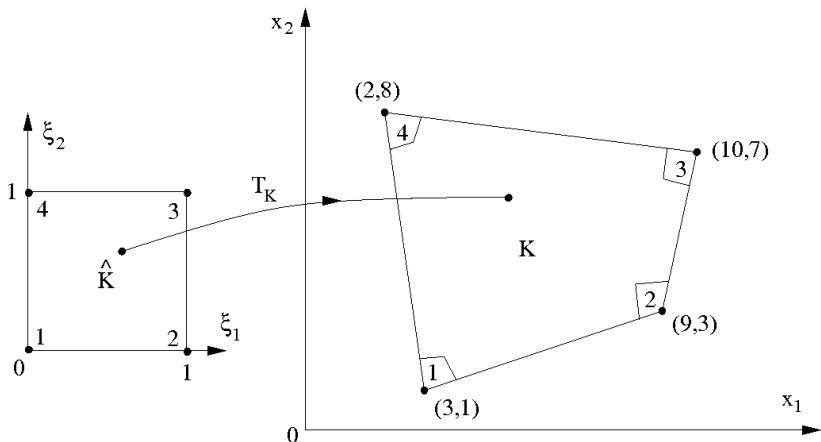
- Obliczenia elementowe zilustrujemy na przykładzie elementu czworokątnego pokazanego na rysunku. Przyjmijmy, że forma dwuliniowa i funkcjonal liniowy są następujące:

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad L(v) = \int_{\Gamma_N} 1 \cdot v \, dS. \quad (15)$$

przy czym pierwszy bok czworokąta leży na Γ_N .

Zastosujemy jednopunktową kwadraturę Gaussa z punktem całkowania i wagą $\boldsymbol{\xi}^1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $w^1 = 1$.

- Element czworokątny stopnia $p = 1$.



- W pierwszym kroku obliczymy wartość odwzorowania $x(\xi)$ i jego pochodnych:

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^4 \hat{\psi}_i(\xi) x^i, \text{ gdzie } x^1 = (3, 1), \quad x^2 = (9, 3), \quad x^3 = (10, 7), \quad x^4 = (2, 8).$$

- Dla współrzędnej x_1 otrzymujemy:

$$x_1 = [3(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) + 9\xi_1(1 - \xi_2) + 10\xi_1\xi_2 + 2(1 - \xi_1)\xi_2]_{(\xi_1, \xi_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = 6,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} = [-3(1 - \xi_2) + 9(1 - \xi_2) + 10\xi_2 - 2\xi_2]_{(\xi_1, \xi_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = 7,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} = [-3(1 - \xi_1) - 9\xi_1 + 10\xi_1 + 2(1 - \xi_1)]_{(\xi_1, \xi_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = 0,$$

zaś dla współrzędnej x_2 :

$$x_2 = [1(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) + 3\xi_1(1 - \xi_2) + 7\xi_1\xi_2 + 8(1 - \xi_1)\xi_2]_{(\xi_1, \xi_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = \frac{19}{4},$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} = [-1(1 - \xi_2) + 3(1 - \xi_2) + 7\xi_2 - 8\xi_2]_{(\xi_1, \xi_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} = [-1(1 - \xi_1) - 3\xi_1 + 7\xi_1 + 8(1 - \xi_1)]_{(\xi_1, \xi_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = \frac{11}{2}.$$

- W punkcie całkowania mamy więc:

$$\left\{ \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right\} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix}, \quad J = \det \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right\} = \frac{77}{2}, \quad \left\{ \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{1}{77} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}.$$

- Znajdujemy pochodne elementowej funkcji kształtu ψ_1 względem zmiennych x_i w punkcie całkowania:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_1} = \left[-(1 - \xi_2) \frac{1}{7} - (1 - \xi_1) \cdot \frac{-1}{77} \right]_{(\xi_1, \xi_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = -\frac{10}{154},$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_2} = \left[-(1 - \xi_2) \cdot 0 - (1 - \xi_1) \frac{2}{11} \right]_{(\xi_1, \xi_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = -\frac{1}{11}.$$

- Wyraz $\hat{B}_{1,1}^K = B_{1,1}^K$ macierzy sztywności możemy obliczyć następująco:

$$\hat{B}_{1,1}^K = \int_{\hat{K}} (\nabla \psi_1 \cdot \nabla \psi_1) J|_{x=x(\xi)} \approx \sum_{l=1}^{N_g} (\nabla \psi_1 \cdot \nabla \psi_1) J|_{x=x(\xi^l)} w^l =$$

$$\left(-\frac{10}{154}, -\frac{1}{11} \right) \cdot \left(-\frac{10}{154}, -\frac{1}{11} \right) \times \frac{77}{2} \times 1 \approx 0.4805.$$

- Przejdźmy teraz do obliczenia wektora obciążenia wyrażonego za pomocą całki krzywoliniowej po dolnym boku elementu. Jego opis parametryczny, przy $t \in [0, 1]$, jest następujący:

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}(t)) = \sum_{i=1}^4 \hat{\psi}_i(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}^i|_{\xi_1=t, \xi_2=0} = (3, 1)(1 - t) + (9, 3)t = (3 + 6t, 1 + 2t),$$

$$\frac{dx_1}{dt} = 6, \quad \frac{dx_2}{dt} = 2.$$

- Wyraz $\check{L}_1^K = L_1^K$ wektora obciążenia obliczamy następująco:

$$\check{L}_1^K = \underbrace{\int_0^1 1 \cdot \psi_1(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}(t))) \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2}}_{g(t)} \approx$$

$$\sum_{l=1}^{N_g} 1 \cdot \psi_1(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}(t))) \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2} \bigg|_{t=\xi^l} \cdot w^l = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \sqrt{6^2 + 2^2} \cdot 1 = 3.1623.$$

- W rozpatrywanym przykładzie nie występowały składniki $\check{B}_{mn}^K$ i $\hat{L}_m^K$.
Obliczenie $\check{B}_{mn}^K$ sprowadzałoby się do wykorzystania powyższego wzoru z podstawieniem:

$$g(t) = p\psi_n\psi_m \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2} \text{ przy } \xi_1 = t, \xi_2 = 0.$$

- Obliczenie $\hat{L}_m^K$ miałoby postać:

$$\hat{L}_m^K = \int_K f\psi_m dx = \int_{\hat{K}} \underbrace{f\psi_m \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)}}_{g(\boldsymbol{\xi})} \mathbf{x}=\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \approx \sum_{l=1}^{N_g} g(\boldsymbol{\xi}^l) w^l.$$