

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Algorytmy składania macierzy sztywności i wektora obciążenia w 2D

- Jak pamiętamy jednym z pierwszych algorytmów, które zbudowaliśmy dla MES w 1D był algorytm składania globalnych macierzy sztywności i wektorów obciążenia z ich odpowiedników elementowych. Podobnie stworzymy te algorytmy dla MES w 2D.
- Globalne funkcje kształtu ϕ_i są w poszczególnych elementach elementowymi funkcjami kształtu ψ_m (bądź trywialnie znikają):

$$\phi_i|_K = \psi_m. \quad (1)$$

- Możemy ustalić związek między numeracją funkcji globalnych oraz numeracją funkcji elementowych. Oznaczmy symbolem $\sigma(i, K)$ numer elementowej funkcji kształtu w elemencie K , która składa się na i -tą funkcję globalną ϕ_i :

$$\phi_i|_K = \psi_{\sigma(i, K)} \quad (2)$$

- Analogicznie, niech symbol $\rho(m, K)$ oznacza numer globalnej funkcji kształtu, na którą składa się m -ta elementowa funkcja kształtu ψ_m w elemencie K :

$$\psi_m = \phi_{\rho(m, K)}|_K. \quad (3)$$

- Rozważamy siatkę 4×3 elementów stopnia $p = 2$ przedstawioną na rysunku. Składa się ona z 12 elementów i 63 węzłów. Przyjętą przykładową numerację elementów węzłów przedstawiono w elemencie poniżej.
- Niektóre wartości macierzy $\sigma(i, K)$ odczytujemy jako następujące:

$$\begin{aligned}\sigma(17, 1) &= 9, & \sigma(18, 5) &= 4, & \sigma(25, 5) &= 5, \\ \sigma(47, 12) &= 1, & \sigma(62, 12) &= 6, & \sigma(33, 8) &= 7.\end{aligned}\tag{4}$$

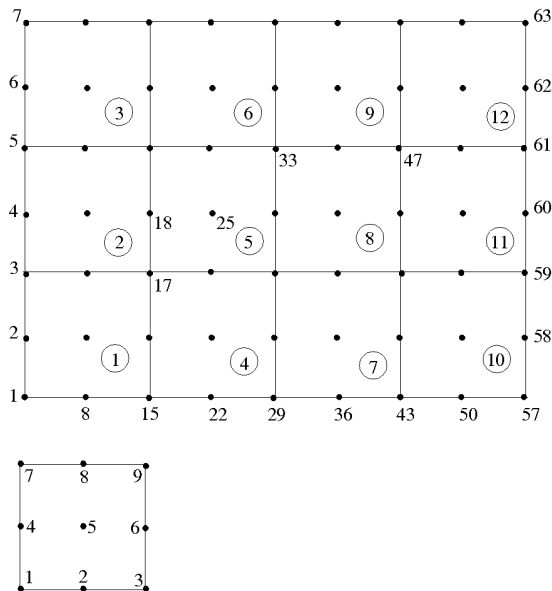
Przykładowo, chcąc znaleźć $\sigma(17, 1)$ sprawdzamy, że 17 globalna funkcja kształtu jest 9 elementową funkcją kształtu w elemencie 1 (17 globalny węzeł jest 9 węzłem 1 elementu), więc $\sigma(17, 1) = 9$.

- Wybrane wartości macierzy $\rho(m, K)$ odczytujemy jako następujące:

$$\begin{aligned}\rho(9, 1) &= 17, & \rho(4, 5) &= 18, & \rho(5, 5) &= 25, \\ \rho(1, 12) &= 47, & \rho(6, 12) &= 62, & \rho(7, 8) &= 33.\end{aligned}\tag{5}$$

Chcąc znaleźć $\rho(4, 5)$ sprawdzamy, że 4 funkcja kształtu elementu 5 składa się na 18 globalną funkcję kształtu (4 węzeł elementu 5 jest globalnym 18 węzłem), więc $\rho(4, 5) = 18$.

- Siatka elementów czworokątnych stopnia $p = 2$. Numeracja globalna i elementowa węzłów



- Weźmy pod uwagę definicję wektora obciążenia w 2D MES, składnika wyrażającego się przez całki. Wykorzystajmy możliwość rozbicia tych całek na składniki z poszczególnych elementów:

$$\begin{aligned}
 F_i &= L(\phi_i) = \int_{\Omega} f \phi_i \, dx + \int_{\Gamma_C} p \hat{u} \phi_i \, dS + \int_{\Gamma_N} \hat{\sigma} \phi_i \, dS = \\
 &\sum_{K: \phi_i \neq 0} \left\{ \int_K f \phi_{i|K} \, dx + \int_{\Gamma_C \cap \partial K} p \hat{u} \phi_{i|K} \, dS + \int_{\Gamma_N \cap \partial K} \hat{\sigma} \phi_{i|K} \, dS \right\} = \\
 &\sum_{K: \phi_i \neq 0} \left\{ \int_K f \psi_{\sigma(i,K)} \, dx + \int_{\Gamma_C \cap \partial K} p \hat{u} \psi_{\sigma(i,K)} \, dS + \int_{\Gamma_N \cap \partial K} \hat{\sigma} \psi_{\sigma(i,K)} \, dS \right\} \quad (6)
 \end{aligned}$$

- Zdefiniujmy elementowy wektor obciążenia:

$$L_m^K = \int_K f \psi \, dx + \int_{\Gamma_C \cap \partial K} p \hat{u} \psi_m \, dS + \int_{\Gamma_N \cap \partial K} \hat{\sigma} \psi_m \, dS \quad (7)$$

- Z jego pomocą powyższe wyrażenie na F_i możemy przedstawić następująco:

$$F_i = \sum_{K: \phi_i \neq 0} L_{\sigma(i,K)}^K. \quad (8)$$

Zauważamy, że postać wzoru na globalny wektor obciążenia jest identyczna jak w przypadku 1D rozpatrywanym wcześniej.

- Wprowadzając operator gradientu $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2})$ możemy wygodniej zapisać formę dwuliniową sformułowania wariacyjnego w 2D:

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \left(k \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + buv \right) dx + \int_{\Gamma_C} puv \, dS = \int_{\Omega} (k \nabla u \cdot \nabla v + buv) dx + \int_{\Gamma_C} puv \, dS. \quad (9)$$

- Obliczenie globalnej macierzy sztywności z zastosowaniem rozbiecia całek na składniki z poszczególnych elementów ma postać:

$$K_{ij} = B(\phi_j, \phi_i) = \int_{\Omega} (k \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i + b \phi_j \phi_i) dx + \int_{\Gamma_C} p \phi_j \phi_i \, dS = \sum_{K: \phi_i, \phi_j \neq 0} \left\{ \int_K (k \nabla \phi_{j|K} \cdot \nabla \phi_{i|K} + b \phi_{j|K} \phi_{i|K}) dx + \int_{\Gamma_C \cap \partial K} p \phi_{j|K} \phi_{i|K} \, dS \right\} = \sum_{K: \phi_i, \phi_j \neq 0} \left\{ \int_K (k \nabla \psi_{\sigma(j,K)} \cdot \nabla \psi_{\sigma(i,K)} + b \psi_{\sigma(j,K)} \psi_{\sigma(i,K)}) dx + \int_{\Gamma_C \cap \partial K} p \psi_{\sigma(j,K)} \psi_{\sigma(i,K)} \, dS \right\}.$$

- Definiujemy elementową macierz sztywności:

$$B_{mn}^K = \int_K (k \nabla \psi_n \cdot \nabla \psi_m + b \psi_n \psi_m) dx + \int_{\Gamma_C \cap \partial K} p \psi_n \psi_m \, dS \quad (10)$$

- Za pomocą pojęcia B_{mn}^K wyrażenie na globalną macierz sztywności możemy więc przedstawić następująco:

$$K_{ij} = \sum_{K: \phi, \phi_j \neq 0} B_{\sigma(i,K), \sigma(j,K)}^K \quad (11)$$

- Jak i w przypadku F_i widzimy, że jest to wzór identyczny jak w sytuacji jednowymiarowej. Otrzymane wyrażenia na K_{ij} oraz F_i pozwalają więc obliczać te wielkości za pomocą dokładnie takich samych algorytmów składania, jakich używamy w 1D.
- Dla wektora obciążenia:

```

 $F_i = 0, \quad i = 1, \dots, N$ 
for  $i = 1, \dots, N$ 
  for  $K : \phi_i \neq 0$  w  $K$ 
     $F_i := F_i + L_{\sigma(i,K)}^K$ 
  endfor  $K$ 
endfor  $i$ 

```

```

 $F_i = 0, \quad i = 1, \dots, N$ 
for  $K = 1, \dots, K_{max}$ 
  for  $m = 1, \dots, ndof_K$ 
     $F_{\rho(m,K)} := F_{\rho(m,K)} + L_m^K$ 
  endfor  $m$ 
endfor  $K$ 

```

Przypominamy, że wersja z lewej strony wynika wprost z rachunku, a wersja po prawej powstaje z odwrócenia porządku pętli, co pozwala na bardziej efektywne zastosowanie w praktycznych procedurach MES.

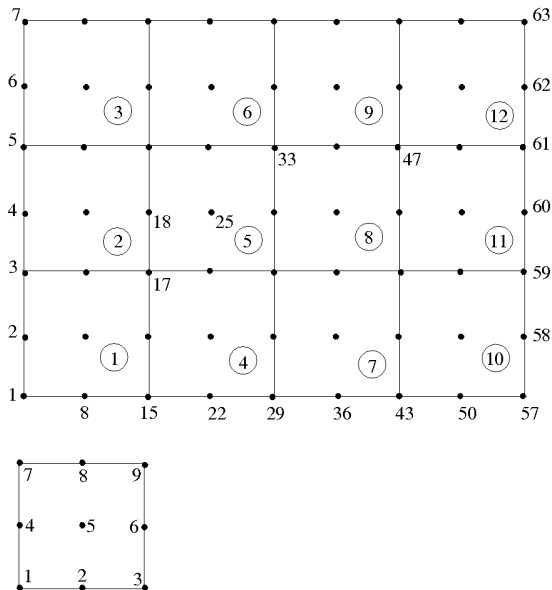
Algorytm składania macierzy sztywności

- Dla macierzy sztywności odpowiednie wersje algorytmu składania wyglądają następująco:

```
 $K_{ij} = 0, \quad i, j = 1, \dots, N$   
for  $i = 1, \dots, N$   
  for  $j = 1, \dots, N$   
    for  $K : \phi_i, \phi_j \neq 0$  w  $K$   
       $K_{ij} := K_{ij} + B_{\sigma(i,K), \sigma(j,K)}^K$   
    endfor  $K$   
  endfor  $j$   
endfor  $i$ 
```

```
 $K_{ij} = 0, \quad i, j = 1, \dots, N$   
for  $K = 1, \dots, K_{max}$   
  for  $m = 1, \dots, ndof_K$   
    for  $n = 1, \dots, ndof_K$   
       $K_{\rho(m,K), \rho(n,K)} := K_{\rho(m,K), \rho(n,K)} + B_{mn}^K$   
    endfor  $m, n$   
  endfor  $K$ 
```


- **Przykład.** Rozpatrujemy siatkę elementów jak poprzednio:



- Obliczmy wybrane wyrazy wektora obciążeń posługując się pierwszą wersją algorytmu składania, powiedzmy wyrazy F_{17} , F_{18} i F_{25} .

Obliczenie F_{17} . Globalna funkcja kształtu ϕ_{17} jest różna od zera w elementach $\{1, 2, 4, 5\}$ (ϕ_{17} ma wartość 1 w węźle 17 więc jest niezerowa w zawierających go elementach), stąd sumowanie przebiega po tym zbiorze wartości K . W elemencie $K = 1$ globalna funkcja ϕ_{17} jest 9 w elemencie $K = 2$ jest 3, w elemencie $K = 4$ jest 7, w elemencie $K = 5$ jest 1 elementową funkcją kształtu. Wobec tego wynik sumowania ma postać:

$$F_{17} = L_9^1 + L_3^2 + L_7^4 + L_1^5.$$

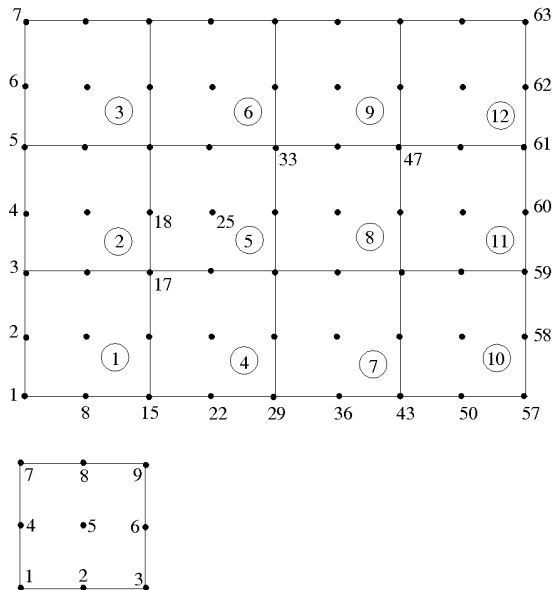
Obliczenie F_{18} . Globalna funkcja kształtu ϕ_{18} jest różna od zera w elementach $\{2, 5\}$ (ϕ_{18} ma wartość 1 w węźle 18 więc jest niezerowa w zawierających go elementach), stąd sumowanie przebiega po tym zbiorze wartości K . W elemencie $K = 2$ globalna funkcja ϕ_{18} jest 6 w elemencie $K = 5$ jest 4 elementową funkcją kształtu. Wobec tego wynik sumowania ma postać:

$$F_{18} = L_6^2 + L_4^5.$$

Obliczenie F_{25} . Globalna funkcja kształtu ϕ_{25} jest różna od zera tylko w elemencie $\{5\}$ (węzeł 25 jest wewnętrznym węzłem tego elementu), stąd sumowanie sprowadza się do elementu $K = 5$. Globalna funkcja ϕ_{25} jest 5 elementową funkcją kształtu. Wobec tego wynik sumowania ma postać:

$$F_{25} = L_5^5.$$

Przykład. Składanie macierzy sztywności.



Przykład. Składanie macierzy sztywności.

- Obliczmy wybrane wyrazy macierzy sztywności dla siatki z rysunku, posługując się pierwszą wersją algorytmu składania, powiedzmy wyrazy $K_{17,17}$, $K_{17,18}$, $K_{33,47}$, $K_{17,33}$, $K_{26,33}$, $K_{17,47}$.

Obliczenie $K_{17,17}$.

Globalna funkcja kształtu ϕ_{17} jest różna od zera w elementach $\{1, 2, 4, 5\}$, stąd sumowanie przebiega po tym zbiorze wartości K . Biorąc pod uwagę elementowe numery $\sigma(17, K)$ funkcji ϕ_{17} znajdujemy, że:

$$K_{17,17} = B_{9,9}^1 + B_{3,3}^2 + B_{7,7}^4 + B_{1,1}^5.$$

Obliczenie $K_{17,18}$.

Globalna funkcja kształtu ϕ_{17} jest różna od zera w elementach $\{1, 2, 4, 5\}$, zaś ϕ_{18} w elementach $\{2, 5\}$, stąd sumowanie przebiega po części wspólnej tych zbiorów, tj. $\{2, 5\}$. Biorąc pod uwagę elementowe numery funkcji ϕ_{17} i ϕ_{18} znajdujemy, że:

$$K_{17,18} = B_{3,6}^2 + B_{1,4}^5.$$

- Obliczenie $K_{33,47}$. Globalna funkcja kształtu ϕ_{33} jest różna od zera w elementach $\{5, 6, 8, 9\}$, zaś ϕ_{47} w elementach $\{8, 9, 11, 12\}$. Stąd sumowanie przebiega po części wspólnej tych zbiorów, tj. $\{8, 9\}$. Biorąc pod uwagę elementowe numery funkcji ϕ_{33} i ϕ_{47} znajdujemy, że:

$$K_{33,47} = B_{1,3}^9 + B_{7,9}^8.$$

Obliczenie $K_{17,33}$. Globalna funkcja kształtu ϕ_{17} jest różna od zera w elementach $\{1, 2, 4, 5\}$, zaś ϕ_{33} w elementach $\{5, 6, 8, 9\}$. Stąd sumowanie przebiega po części wspólnej tych zbiorów, tj. po jednym elemencie $\{5\}$. Biorąc pod uwagę elementowe numery funkcji ϕ_{33} i ϕ_{17} znajdujemy, że:

$$K_{17,33} = B_{1,9}^5.$$

Obliczenie $K_{17,47}$. Globalna funkcja kształtu ϕ_{17} jest różna od zera w elementach $\{1, 2, 4, 5\}$, zaś ϕ_{46} w elementach $\{8, 9, 11, 12\}$. Nie ma więc wspólnych elementów, gdzie te dwie funkcje byłyby niezerowe, zbiór sumowania w algorytmie jest pusty, stąd

$$K_{17,47} = 0.$$

Zauważmy, że taki sam wynik dostaniemy dla każdej pary funkcji, których węzły nie należą do przynajmniej jednego wspólnego elementu. Wyrazy globalnej macierzy odpowiadające wystarczająco oddalonym węzłom są więc zerowe. Sprawia to, że macierz K_{ij} jest macierzą rzadką – ma niewielki ułamek wyrazów różnych od zera.