

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Rozwiązywanie metodą elementów skończonych wybranych zagadnień fizyki i techniki, cz. II

Idea MES – przypomnienie

- ▶ Ideą metody elementów skończonych jest przybliżone rozwiązywanie równań różniczkowych zapisanych za pomocą sformułowania wariacyjnego:

Znaleźć $u \in V$ takie, że:

$$B(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V,$$

w zbudowanej przez nas skończenie wymiarowej podprzestrzeni V_h oryginalnej przestrzeni funkcyjnej V :

Znaleźć $u_h \in V_h \subset V$ takie, że:

$$B(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

(Dla uproszczenia zaniedbaliśmy niezerowe warunki brzegowe typu Dirichleta.)

Jak widzieliśmy, prowadzi to do układu równań liniowych na współczynniki u_i rozwinięcia rozwiązania $u_h = \sum u_i \phi_i$ w funkcje bazowe ϕ_i przestrzeni V_h :

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad \rightarrow \quad \mathbf{u}, \quad u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i(x).$$

- ▶ Wychodząc z tej idei rozpatrzymy podejście MES do innych zagadnień fizycznych, ograniczając się tylko do podania odpowiednich sformułowań słabych $B(u, v) = L(v)$.

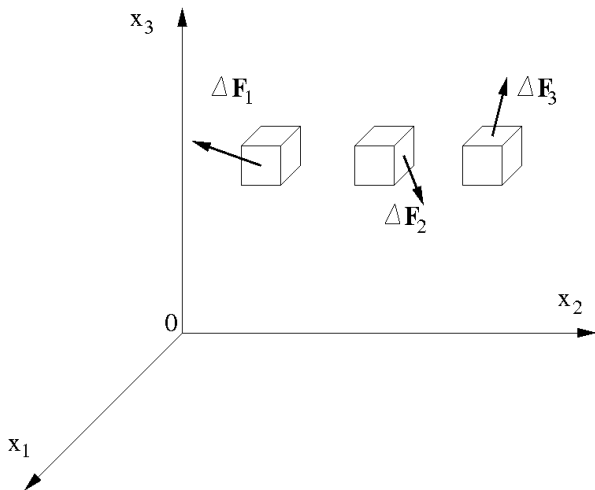
Liniowa teoria sprężystości

- ▶ Jednym z zagadnień technicznych najczęściej analizowanych metodą elementów skończonych jest mechanika ciał odkształcalnych. Znajduje ona zastosowania do projektowania różnych budowli, pojazdów, urządzeń przemysłowych i wielu innych. Większość z tych zagadnień sprowadza się do modelu określanego jako liniowa teoria sprężystości.
- ▶ Parametry opisujące zachowanie mechaniczne ciał.
 - $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ – **wektor przemieszczeń** opisujący ruch punktów ciała odkształcalnego.
 - $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ – **macierz odkształceń**. Jest uogólnieniem pojęcia wydłużenia względnego pręta $\frac{\Delta l}{l}$ na trzy wymiary.
 - σ_{ij} – **macierz naprężeń**. Stanowi ona uogólnienie pojęcia siły na jednostkę pola $\frac{F}{\Delta s}$ dla rozciąganego pręta. Znaczenie σ_{ij} obrazuje rysunek, na którym pokazano wycięte myślowo z ciała małe sześciiany o ścianach prostopadłych do osi układu współrzędnych oraz działające na nie ze strony reszty ciała siły $\Delta \mathbf{F}_i = (\Delta \mathbf{F}_{i1}, \Delta \mathbf{F}_{i2}, \Delta \mathbf{F}_{i3})$, gdzie $i = 1, 2, 3$ wskazuje kierunek prostopadły do ściany.

- Definiujemy macierz naprężeń jako:

$$\sigma_{ij} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{ij}}{\Delta s}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

gdzie Δs oznacza pole ściany sześcianu. Można pokazać, że macierz naprężeń jest symetryczna, tj. że $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.



Liniowa teoria sprężystości

- ▶ Nacierz naprężeń spełnia następujące równanie równowagi:

$$-\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i, \quad i = 1, 2, 3$$

w którym f_i oznacza siły działające na cząsteczki ciała na jednostkę objętości (np. siły grawitacji).

- ▶ Związek między macierzą odkształceń ϵ_{ij} a macierzą naprężeń σ_{ij} jest znany jako prawo Hooke'a i ma następującą postać:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk},$$

gdzie μ i λ to parametry charakteryzujące materiał zwane stałymi Lamé'go.

- ▶ Warunki brzegowe dla zagadnienia mechaniki mogą być dwu rodzajów:
 - $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$ na $\partial\Omega_D$ – kinematyczne warunki brzegowe,
 - $\sigma_{ij}n_j = \hat{t}_i$ na $\partial\Omega_N$ – statyczne warunki brzegowe.

Pierwsze z nich interpretujemy jako narzucenie przemieszczeń $\hat{\mathbf{u}}$ na części brzegu $\partial\Omega_D$, drugie zaś odpowiadają przyłożeniu sił na jednostkę powierzchni $\hat{\mathbf{t}}$ na części brzegu $\partial\Omega_N$ o wektorze normalnej zewnętrznej $\mathbf{n}$.

Liniowa teoria sprężystości

- Sformułowanie zagadnienia teorii sprężystości obejmuje wszystkie wyżej wspomniane elementy i ma następującą postać:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} & = & f_i \text{ w } \Omega, \\ \epsilon_{ij} & = & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ w } \Omega, \\ \sigma_{ij} & = & 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} \text{ w } \Omega, \\ u_i & = & \hat{u}_i \text{ na } \Gamma_D, \\ \sigma_{ij} n_j & = & \hat{t}_i \text{ na } \Gamma_N. \end{array} \right.$$

- Sformułowanie wariacyjne otrzymamy według reguł podobnych do stosowanych poprzednio. W pierwszym kroku mnożymy równanie równowagi przez wektorową funkcję testową $\mathbf{v} = \{v_i\}_{i=1,3}$ i całkujemy po obszarze Ω :

$$-\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} v_i \, dx = \int_{\Omega} f_i v_i \, dx.$$

Liniowa teoria sprężystości

- ▶ Następnie wykonujemy całkowanie przez części wyrazu po lewej stronie stosując twierdzenie Greena-Gaussa-Ostrogradskiego:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} v_i \, dx &= - \int_{\Omega} [(\sigma_{ij} v_i)_{,j} - \sigma_{ij} v_{i,j}] \, dx = \\ - \int_{\Gamma} \sigma_{ij} v_i n_j \, dS + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \left[\frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) + \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) \right] \, dx &= \\ &= - \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j v_i \, dS + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \, dx \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy tu z rozbitcia gradientu $v_{i,j}$ na część symetryczną i antysymetryczną oraz wzięliśmy pod uwagę znikanie zwężenia symetrycznego tensora σ_{ij} z antysymetryczną częścią $v_{i,j}$.

- ▶ Z tą modyfikacją sformułowanie przyjmuje teraz postać następującą:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \, dx = \int_{\Omega} f_i v_i \, dx + \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j v_i \, dS.$$

Liniowa teoria sprężystości

- ▶ W kolejnym kroku rozbijamy całkę powierzchniową po $\partial\Omega$ na składniki całek po $\partial\Omega_N$ oraz po $\partial\Omega_D$ oraz bierzemy pod uwagę, że na $\partial\Omega_N$ mamy $\sigma_{ij}n_j = \hat{t}_i$. Przyjmujemy też, że na $\partial\Omega_D$ funkcje testowe znikają, $v_i = 0$. Prowadzi do tzw. *zasady prac wirtualnych*:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \, dx = \int_{\Omega} f_i v_i \, dx + \int_{\partial\Omega_N} \hat{t}_i v_i \, dS, \quad \forall v_i : v_i = 0, \text{ na } \partial\Omega_D.$$

- ▶ Ostateczne sformułowanie wariacyjne otrzymujemy wyrażając naprężenia przez równania Hooke'a. Przyjmuje ono postać

Znaleźć $\mathbf{u}$ takie, że $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$ na $\partial\Omega_D$ oraz:

$$\underbrace{\int_{\Omega} [2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) + \lambda \varepsilon_{kk}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ll}(\mathbf{v})] \, dx}_{B(\mathbf{u}, \mathbf{v})} = \underbrace{\int_{\Omega} f_i v_i \, dx + \int_{\partial\Omega_N} \hat{t}_i v_i \, dS}_{L(\mathbf{v})}, \quad \forall \mathbf{v}, \text{ takich że } \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ na } \partial\Omega_D.$$

- ▶ Ma ono standardową formę $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v})$ umożliwiającą zastosowanie metody elementów skończonych.

Metoda elementów brzegowych: elektromagnetyzm

- ▶ Metoda elementów brzegowych może być stosowana do zagadnień w jednorodnym ośrodku, np. w powietrzu czy próżni. Dlatego też najczęściej używa się jej do zagadnień falowych akustyki lub elektromagnetyzmu.
- ▶ Ideę metody przedstawimy na przykładzie równania Poissona, aby uniknąć złożoności rozumowania dla równania falowego elektromagnetyzmu. W tym celu rozpatrujemy dwa równania Poissona z prawymi stronami f i g oraz odpowiadające im formy słabe:

$$\begin{aligned}-\Delta u = f &\iff \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, dS, \\ -\Delta w = g &\iff \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla z \, dx = \int_{\Omega} g z \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n} z \, dS.\end{aligned}$$

- ▶ Weźmy teraz jako funkcje testowe rozwiązania: $v = w$ i $z = u$:

$$\begin{aligned}\underbrace{\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dx}_{||} &= \int_{\Omega} f w \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} w \, dS, \\ \underbrace{\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla u \, dx} &= \int_{\Omega} g u \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n} u \, dS.\end{aligned}$$

Metoda elementów brzegowych

- ▶ Ze względu na równość lewych strony wnoskujemy o równości prawych, tj.

$$\int_{\Omega} f w \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} w \, dS = \int_{\Omega} g u \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n} u \, dS.$$

- ▶ Weźmy teraz w jako rozwiązanie odpowiadające obciążeniu g w postaci umieszczonego w $\mathbf{y}$ ładunku punkowego w równaniu Poissona elektrostatyki $-\Delta w = g$. Ładunek taki traktuje się jako granicę następującej funkcji:

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a^2}, & \text{dla } |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < a, \\ 0 & \text{dla } |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq a. \end{cases} \quad a \longrightarrow 0,$$

Wynika stąd następującą własność:

$$\int_{\Omega} g(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) \, dx = \frac{1}{\pi a^2} \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < a} u(\mathbf{x}) \, dx \longrightarrow u(\mathbf{y}).$$

- ▶ Pojęcie $g(\mathbf{x})$ nazywa się "funkcją delta Diraca $\delta_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ ". Znanе jest odpowiadające jej rozwiązanie równania Poissona dla $\Omega = \mathbb{R}^2$:

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Metoda elementów brzegowych

- ▶ Ze względu na przytoczoną wyżej własność, 1-sze równanie z poprzedniej strony przyjmie postać :

$$u(\mathbf{y}) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n} u \, dS = \int_{\Omega} f w \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} w \, dS.$$

Jeśli przejdziemy z punktem $\mathbf{y}$ do granicy tak, aby $\mathbf{y} \in \partial\Omega$ to przed pierwszym wyrazem pojawi się czynnik skalujący $1/2$ (dla gładkiego brzegu):

$$\frac{1}{2}u(\mathbf{y}) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n} u \, dS = \int_{\Omega} f w \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} w \, dS.$$

Zauważmy, że niewiadome rozwiązanie u lub $\partial u / \partial n$ występuje wyłącznie na brzegu $\partial\Omega$, dlatego też równanie to nazywa się całkowym równaniem brzegowym. Rozwiązać je można podobną techniką jak w MES. Przybliża się nieznane wielkości u lub $\partial u / \partial n$ jako kombinacje liniowe funkcji kształtu.

- ▶ Jedna z wersji analogicznego równania dla 3D elektromagnetyzmu ma postać

$$\mathbf{E}(\mathbf{y}) = \nabla_{\mathbf{y}} \times \int_{\Gamma} [(\mathbf{E} \times \mathbf{n}) G dS + \int_{\Gamma} (\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n} G dS + \nabla_{\mathbf{y}} \frac{1}{k^2} \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \cdot [(\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n}] G dS$$

gdzie $G = e^{-jkR} / (4\pi R)$, $R = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, zaś $k = 2\pi / \lambda$ jest liczbą falową.