Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
Metoda elementów skończonych w 1D

Przypomnienie: Analiza w 1D

- Pochodna funkcji:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Przykład:

$$f = x^2, \quad \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x.$$

- Pochodna funkcji złożonej:

$$\frac{d\, f(g(x))}{dx} = \left.\frac{df}{dg}\right|_{g=g(x)} \cdot \frac{dg}{dx}. \tag{2}$$

$$f = \sin \underbrace{x^2}_{g}, \quad \frac{df}{dx} = \left.\frac{d\sin(g)}{dg}\right|_{g=x^2} \frac{d(x^2)}{dx} = \cos \underbrace{g}_{x^2} \cdot 2x = \cos x^2 \cdot 2x.$$

- Liniowość; pochodna iloczynu funkcji:

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x), \qquad (fg)' = f'g + fg'.$$

Przypomnienie: Analiza w 1D

- Całka (nieoznaczona):

$$\int f(x)\,dx = F(x) \quad \Longleftrightarrow \quad F'(x) = f(x). \tag{3}$$

- Całkowanie przez części.

$$\int uv'dx = uv - \int u'v\,dx. \tag{4}$$

Przykład:

$$\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'dx = x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx = x\sin x + \cos x.$$

- Całkowanie przez podstawienie:

$$\int f(g(x))\frac{dg}{dx}dx = \int f(g)dg, \quad g = g(x). \tag{5}$$

Przypomnienie: Analiza w 1D

Przykład:

$$\int \sin \underbrace{x^2}_{g} \cdot \underbrace{2x}_{dg/dx} \, dx = \int \sin g \, dg = -\cos g = -\cos x^2.$$

- Liniowość całki:
$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) \, dx \;\; + \;\; \beta \int g(x) \, dx. \tag{6}$$
- Całka oznaczona:
$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b \in R, \quad \text{gdzie} \quad F(x) = \int f(x) \, dx. \tag{7}$$
- Równanie różniczkowe zwyczajne 2-go rzędu: poszukujemy $y(x)$ takiego że
$$G(x, y, y', y'') = 0, \quad \text{gdzie } \; G(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot) \; \text{ dana funkcja.} \tag{8}$$

  Przykład:
$$y'' + \sin y + (y')^2 + \cos x = 0.$$

Przypomnienie: Algebra

- Własności przestrzeni wektorowej V (wektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$, liczby $\alpha, \beta \in R$).

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}, && \alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v},\\
&(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}), && (\alpha+\beta)\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{u},\\
&\boldsymbol{u}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{u}, && (\alpha\beta)\boldsymbol{u}=\alpha(\beta\boldsymbol{u}),\\
&\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}, && 1\,\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Przykład 1: $V = R^n$:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n), \quad \boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n),\\
&\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}:=(u_1+v_1,\ldots,u_n+v_n), \quad \alpha\boldsymbol{u}:=(\alpha u_1,\ldots,\alpha u_n).
\end{aligned}
$$

Przykład 2: $V =$ zbiór funkcji.

$$
f(x), g(x), \quad (f+g)(x):=f(x)+g(x), \quad (\alpha f)(x):=\alpha f(x).
$$

- Def. Formą liniową (funkcjonałem liniowym) L nazywamy odwzorowanie przestrzeni wektorowej V w liczby rzeczywiste, $L : V \to R$, takie że:

$$
L(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v})=\alpha L(\boldsymbol{u})+\beta L(\boldsymbol{v}), \;\; \forall \;\; \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V, \;\; \alpha\beta\in R.
$$

Algebra

Przykład 1:

$$V = R^2, \ \ \boldsymbol{u} = (u_1, u_2), \ \ L(\boldsymbol{u}) := 2u_1 - 3u_2 \in R.$$

Przykład 2: V-przestrzeń funkcji na odcinku $[a, b]$.

$$L(f) := \int_a^b (2\ f - 3\ f')\ dx \in R.$$

- Def. Formą dwuliniową B nazywamy odwzorowanie par wektorów z przstrzeni V w liczby rzeczywiste, $B:\ V \times V \to R$, takie że:

  1. $B(\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \alpha B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + \beta B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \ \ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V, \ \ \alpha, \beta \in R,$
  2. $B(\boldsymbol{w}, \alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v}) = \alpha B(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}) + \beta B(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}), \ \ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V, \ \ \alpha, \beta \in R.$

  Przykład 1: $V = R^2, \ \ \boldsymbol{u} = (u_1, u_2), \ \boldsymbol{v} = (v_1, v_2),$

  $$B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 2\ u_1 v_1 - 3\ u_1 v_2 + 4\ u_2 v_1 + 7\ u_2 v_2 \in R.$$

  Przykład 2: $V =$ funkcje na $[a, b]$.

  $$B(u, v) := \int_a^b (2\ uv + 3\ uv' - 5\ u'v + 7\ u'v')\ dx \in R.$$

Eliptyczne zadanie brzegowe drugiego rzędu w 1D

- Wykład przedstawia najbardziej popularną wśród inżynierów technikę przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych – metodę elementów skończonych (MES). Rozpoczynamy od jej zastosowania do jednowymiarowych równań eliptycznych drugiego rzędu.
- Rozpatrujemy następujące równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu na odcinku $\Omega = [0, l]$ wraz z warunkami brzegowymi na jego końcach:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\left(au'\right)' + bu' + cu & = & f, \quad x \in (0, l) \\ \alpha_0 u'(0) + \beta_0 u(0) & = & \gamma_0, \\ \alpha_l u'(l) + \beta_l u(l) & = & \gamma_l. \end{array} \right. \tag{10}$$

- Zakładamy, że $a(x), b(x), c(x), f(x)$ są funkcjami gładkimi. Jest to równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach. Zakładamy ponadto, że funkcja $a(x)$ jest ściśle dodatnia, tzn. że istnieje $0 < a_0$ takie że $a_0 \leq a(x)$ dla każdego $x \in [0, l]$.

  O parametrach α_0 i β_0 zakładamy, ż jednocześnie nie znikają , to samo dotyczy α_l i β_l, aby warunki te nie miały postaci $0 = \gamma_0$. Możemy to wyrazić formalnie wymaganiem, aby $\alpha_0^2 + \beta_0^2 > 0$ i $\alpha_l^2 + \beta_l^2 > 0$.

Sformułowanie wariacyjne

- Jeśli $\alpha_0 \neq 0$ i $\alpha_l \neq l$, to mówimy o **naturalnych** warunkach brzegowych, a jeśli $\alpha_0 = 0$ i $\alpha_l = 0$, to warunki brzegowe nazywamy **podstawowymi**.
- Metoda elementów skończonych opiera się na równoważnym sformułowaniu problemu brzegowego za pomocą tzw. sformułowania wariacyjnego, które otrzmymujemy następująco:

  Mnożymy równanie różniczkowe obustronnie przez dowolną gładką funkcję $v(x)$ i całkujmy otrzymaną równość po całym odcinku $\Omega = [0, l]$:

$$\int_0^l \left[-\left(au'\right)' + bu' + cu \right] v \, dx = \int_0^l fv \, dx \tag{11}$$

- W następnym kroku dokonujemy całkowania przez części wyrazu $(au')'v$:

$$-\int_0^l \left(au'\right)' v \, dx = -\left(au'v\right)\Big|_0^l + \int_0^l au'v' \, dx \tag{12}$$

- Przyjmijmy najpierw, iż $\alpha_0 \neq 0$ i $\alpha_l \neq 0$, co umożliwia wyrażenie pochodnych rozwiązania z warunków brzegowych:

$$u'(0) = \frac{1}{\alpha_0}(\gamma_0 - \beta_0 u(0)), \quad u'(l) = \frac{1}{\alpha_l}(\gamma_l - \beta_l u(l)). \tag{13}$$

Sformułowanie wariacyjne

- Podstawiając te wartości do wzoru poprzedniego otrzymujemy:

$$\int_0^l (au'v' + bu'v + cuv)\,dx + \frac{a(l)\beta_l}{\alpha_l}u(l)v(l) - \frac{a(0)\beta_0}{\alpha_0}u(0)v(0) = \int_0^l fv\,dx + \frac{a(l)\gamma_l}{\alpha_l}v(l) - \frac{a(0)\gamma_0}{\alpha_0}v(0) \tag{14}$$

- Zauważmy, że wyrażenia występujące po lewej i prawej stronie wzoru są , odpowiednio, formą dwuliniową i funkcjonałem liniowym o argumentach w postaci funkcji u, v oraz v:

$$\begin{aligned} B(u,v) &= \int_0^l (au'v' + bu'v + cuv)\,dx + \frac{a(l)\beta_l}{\alpha_l}u(l)v(l) - \frac{a(0)\beta_0}{\alpha_0}u(0)v(0), \\ L(v) &= \int_0^l fv\,dx + \frac{a(l)\gamma_l}{\alpha_l}v(l) - \frac{a(0)\gamma_0}{\alpha_0}v(0). \end{aligned} \tag{15}$$

- Ostatecznie więc, przy powyższych oznaczeniach sformułowanie wariacyjne przybiera postać : znaleźć $u(x)$ takie że:

$$B(u,v) = L(v) \quad \forall v. \tag{16}$$

Przykład

- Rozważmy następujący problem brzegowy:

$$\begin{cases} -u'' + u = \sin x, & x \in (0,5) \\ u'(0) + u(0) = 2 \\ 2u'(5) + 3u(5) = 4 \end{cases} \tag{17}$$

Dla tego zadania współczynniki są następujące:

$$\begin{array}{llll} a = 1, & b = 0, & c = 1, & f = \sin x \\ \alpha_0 = 1, & \beta_0 = 1, & \gamma_0 = 2 & \\ \alpha_l = 2, & \beta_l = 3, & \gamma_l = 4 & \end{array} \tag{18}$$

Wobec tego sformułowanie wariacyjne ma postać : znaleźć $u(x)$ takie że:

$$\underbrace{\int_0^5 (u'v' + uv)dx + \frac{1 \cdot 3}{2} u(5)v(5) - \frac{1 \cdot 1}{1} u(0)v(0)}_{B(u,v)} = \underbrace{\int_0^5 \sin x \; v \; dx + \frac{1 \cdot 4}{2} v(5) - \frac{1 \cdot 2}{1} v(0)}_{L(v)} \quad \forall v. \tag{19}$$

Idea metody elementów skończonych

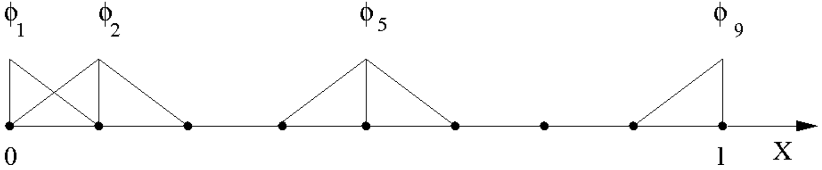
- Idea metody elementów skończonych jest następująca:

  zamiast poszukiwać rozwiązania sformułowania wariacyjnego w zbiorze wszystkich funkcji, poszukujemy go jako kombinacji liniowej skończonej liczby wybranych prostych funkcji, z tymi samymi funkcjami do testowania.

- W najprostszym przypadku funkcje te definiujemy przez podział odcinka $[0, l]$ za pomocą punktów:

$$0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < x_N = l \tag{20}$$

  i przyjęcie, że są to kawałkami liniowe funkcje ciągłe przyjmujące w jednym z punktów podziału wartość 1 i znikające w pozostałych. Ich wygląd mógłby być następujący:



MES

- Zgodnie z ideą MES rozwiązanie przybliżone, które oznaczamy zwyczajowo jako u_h, przyjmuje postać :

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N} u_i \phi_i(x), \tag{21}$$

- Sformułowanie wariacyjne sprowadza się do poszukiwania parametrów $u_i, i = 1, \ldots, N$ takich że:

$$B\left(\sum_{i=1}^{N} u_i \phi_i, \phi_j\right) = L(\phi_j), \;\; j = 1, \ldots, N. \tag{22}$$

gdzie przyjęto $\phi_i, i = 1, \ldots, N$ jako funkcje testowe.

- Ze względu na liniowość formy B względem pierwszego argumentu równanie to możemy przepisać następująco:

$$\sum_{i=1}^{N} u_i B(\phi_i, \phi_j) = L(\phi_j), \;\; j = 1, \ldots, N, \tag{23}$$

tj. w postaci układu równań liniowych ze względu na parametry $u_i, i = 1, \ldots, N$.

MES

- Jeśli wprowadzimy oznaczenia:

$$K_{ji} = B(\phi_i, \phi_j), \quad F_j = L(\phi_j), \quad i, j = 1, \dots, N, \tag{24}$$

układ ten przyjmuje postać :

$$\sum_{i=1}^{N} K_{ji} u_i = F_j, \;\; j = 1, \dots, N \tag{25}$$

lub w zapisie macierzowym:

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}, \tag{26}$$

gdzie:

$$\boldsymbol{K} = \{K_{ij}\}_{i,j=1,N}, \quad \boldsymbol{F} = \{F_i\}_{i=1,N}. \tag{27}$$

- Ze względów historycznych macierz $\boldsymbol{K}$ nazywa się *macierzą sztywności*, wektor $\boldsymbol{F}$ *wektorem obciążenia*, zaś funkcje ϕ_i aproksymujące rozwiązanie *funkcjami kształtu*.

- Poszukiwanie rozwiązań w postaci kombinacji liniowej ϕ_i jest równoznaczne z założeniem, że rozwiązanie to należy do przestrzeni liniowej V_h

$$V_h = \{v_h(x) : \;\; v_h(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi_i(x), \;\; \alpha_i \in R, \; i = 1, \ldots, N\}. \qquad (28)$$

Także użycie ϕ_i jako funkcji testowych jest równoznaczne z wzięciem $v_h \in V_h$. Biorąc bowiem kombinację liniową równań MES ze współczynnikami β_j:

$$B(u_h, \sum_{j=1,}^{N} \beta_j \phi_j) = L(\sum_{j=1,}^{N} \beta_j \phi_j), \qquad (29)$$

widzimy, że odpowiada to użyciu $v_h = \sum_{j=1,}^{N} \beta_j \phi_j \in V_h$. Wobec tego sformułowanie MES przyjmuje postać: znaleźć $u_h \in V_h$ takie, że:

$$B(u_h, v_h) = L(v_h), \;\; \forall v_h \in V_h. \qquad (30)$$

- Przykładowa funkcja z V_h wygląda następująco: